氏　　　　名	新海健一郎
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	甲　第　１２４ 号
学位授与の日付	平成30年 9月30日
学位授与の要件	信州大学学位規程　第５条第１項該当
学 位 論 文 題 目	On matrix Toda brackets in the Baues-Wirsching cohomology
論 文 審 査 委 員	主査　教授　栗林　勝彦　　教授　玉木　大 准教授　五味　清紀　　准教授　境　圭一 教授　鳥居　猛

論　文　内　容　の　要　旨

代数的位相幾何学において、空間のホモトピー群は、古典的かつ重要なホモトピー不変量である。しかしその計算は一般には非常に困難であり、与えられた空間が球面である場合も、全ての次数に対してホモトピー群が決定されているわけではない。その中で、球面のホモトピー群の具体的な計算を行う場合、低い次元のホモトピー群からより高い次元の元を構成するとき、「戸田の積」は有効に働く。実際、戸田の積により、ホモトピー群に多くの非自明な元が構成される。戸田の積を定義するための設定をより一般化して、Barratt は基点付き位相空間の圏上で「行列型戸田の積」を導入した。さらに、Hardie, Kamps, Marcum はこの行列型戸田の積を、0-対象を持つ２－圏上の小さな部分圏(戸田圏)が与えられた場合に２－射の集合として一般化した。これらは、位相空間の圏で定義される、元来の戸田の積、Barratt の行列型戸田の積の完全な一般化となっている。この一般化により、位相空間の圏以外の加法圏を含む様々な圏で、戸田の積の計算方法や性質の応用がなされることが期待される。この点については、これからの課題であり、研究の対象ともなりうる。
Baues -- Wirsching コホモロジーの概念は小圏に付随するコホモロジーであり、小圏をホモロジー代数的枠組みで扱うことを可能にしている。Baues -- Dreckmann は３次の Baues -- Wirsching コホモロジーが、線形トラック拡張を分類することを示している。さらに、ある線形トラック拡張によって定義される「普遍戸田の積」と呼ばれる３次の Baues -- Wirsching コホモロジーの元が、全ての古典的戸田の積を記述することを示した。つまり、任意の戸田の積とその積を与える小圏の部分圏である戸田圏が与えられた場合、小圏の３次の Baues -- Wirsching コホモロジーから、戸田圏により定義される適切な写像が定義され、普遍戸田の積を戸田の積に写すのである。
戸田の積の一般化である行列型戸田の積も同様に、Baues -- Wirsching コホモロジーで検出できるかという疑問が自然に起こる。われわれは、この行列型戸田の積も、Baues -- Wirsching コホモロジーで扱える状況を整理し、結果として戸田の積を検出する先と「同じ」普遍戸田の積が「行列型戸田圏」により定義される写像で、与えられる行列型戸田の

積に写されるという事実を確かめた。それが主定理の一つ(Theorem 2.6)である。この定理における仮定のもとでは、考える行列型戸田の積は古典的戸田の積に分解する。したがって主定理が Baues – Dreckmann の結果の単なる系のように考えられるが、しかし、行列型の積と普遍戸田の積の自然性に関する結果(Propositions 2.10, 2.11)は主定理の記述によりもたらされる新しい結果である。
次に加法圏上の鎖複体の 2-圏における行列型戸田圏を考え、適切な三角圏における Heller の意味での古典的戸田の積に結びつけた。これが、主定理の二つ目(Theorem 2.14)である。この定理から、戸田の積の非自明性を用いて、ある行列型戸田の積の非自明性を示した(Example 5.3)、簡単な具体例を論文の中に一つ記述してある。これらのことにより，計算で用いた行列型戸田圏を含む小圏の 3 次の Baues ーWirsching コホモロジーが、非自明になることが言える。同時に非自明な線形トラック拡張の存在も示せた。こうして、行列型戸田の積のホモロジー代数的な応用が得られたことになる。