

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 26 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400395

研究課題名(和文) 解ける量子力学模型と新しい直交多項式

研究課題名(英文) Exactly Solvable Quantum Mechanics and New Orthogonal Polynomials

研究代表者

小竹 悟 (ODAKE, Satoru)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：40252051

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：次数に欠落があるにも拘わらず完全系をなす新しいタイプの直交多項式が2008年の発見以降精力的に研究され、報告者達はこの新しいタイプの直交多項式である多添字直交多項式を基本的な多項式に対して構成してきた。この新しいタイプの直交多項式では通常直交多項式の特徴付けである3項関係式は成り立たず、より項数の多い再帰関係式が成り立つ事が期待されていたが、それを具体的に示す事ができ、また、それを利用した生成消滅演算子の構成も行った。この研究や多添字直交多項式のリストを増やす研究は、量子力学的定式化を用いて行われ、新しい解ける量子力学模型も数多く得られた。

研究成果の概要(英文)：A new type of orthogonal polynomial, which forms a complete set in spite of missing degrees, has been energetically studied since the discovery in 2008, and the reporters have constructed this new type of orthogonal polynomial, multi-indexed orthogonal polynomial, for fundamental polynomials. For this new type of orthogonal polynomial, the three term recurrence relation, which is the characterization of ordinary orthogonal polynomial, does not hold, and certain recurrence relations with more terms were expected. We obtain them explicitly and the creation/annihilation operators are constructed by using them. This research and research to increase the list of multi-indexed orthogonal polynomials are done by using quantum mechanical formulation and many new exactly solvable quantum mechanical models are obtained.

研究分野：物理学(数理物理学, 素粒子理論)

 キーワード：解ける量子力学模型 離散量子力学 例外・多添字直交多項式 アスキースキームの直交多項式 再帰
 関係式 無反射ポテンシャル 量子ダイログ関数 行列式表示

1. 研究開始当初の背景

(1) 解ける量子力学模型には多くの場合に直交多項式が現れるが、通常の Schrödinger 方程式は 2 階の微分方程式である事から直交多項式も 2 階の微分方程式を満たし、その様な多項式は Hermite, Laguerre, Jacobi の多項式しか存在しないという定理があるため、新しい解ける模型を構成する事は困難と思われていた。

(2) 2 階微分を 2 階差分に置き換える事で Askey スキームの直交多項式が数学者によって得られていたが、報告者達はその様な直交多項式が現れる系を量子力学的に捉えて“離散量子力学”と名付けて研究してきた。

(3) 2008 年に提案された新しいアイデアは、通常の直交多項式は全ての次数が揃っていて完全系を成しているが、次数に欠落があるにも拘わらず完全系を成して 2 階の微分方程式を満たす直交多項式を構成しようというものであり、この新しい直交多項式は例外直交多項式と名付けられた。報告者達は、 l 次式から始まるその様な直交多項式を、量子力学的定式化を用いて新しい解ける量子力学模型を構成する事により、得る事ができた。最初は形状不変性を用いて解ける模型を目の目で発見したのであるが、次には仮想状態除去法という系統的な構成方法を考案して、Laguerre, Jacobi に対する新しい直交多項式を得て、多添字直交多項式と名付けた。この方法は 2 階の差分方程式を満たす Wilson, Askey-Wilson, Racah, q -Racah にも拡張する事ができた。

2. 研究の目的

例外直交多項式・多添字直交多項式という新しい直交多項式及び関連する量子力学系について更に広く深く研究して行く。

(1) 新しい直交多項式の構成及び諸性質を明らかにする。

Askey スキームの最上位に位置する多項式に対して例外・多添字直交多項式を構成したが、Askey スキームの下位の色々な多項式に対しても例外・多添字直交多項式の構成が可能かどうかを調べる。また、その性質を調べる。

通常の直交多項式が素直に現れる量子力学系ではシヌソイダル座標が閉関係式を満たし、生成消滅演算子を自然に構成出来る事は報告者達によって示されたが、例外・多添字直交多項式が現れる系でも生成消滅演算子を自然に構成する事が出来るかを明らかにする。

(2) 新しい直交多項式関連する量子力学系についての知見を得る。

Schrödinger 方程式と Fokker-Planck 方程式との対応から、解ける量子力学模型の具体例は厳密に解ける確率過程を与え、力学変数が離散変数のものは出生死亡過程を与えるが、今回無数の解ける量子力学模型が得られたので、この様な解釈を行ってみる。

通常の直交多項式が現れる模型において、それを例外・多添字直交多項式に置き換えた場合に興味深い物理模型が得られるかどうかを調べる。

3. 研究の方法

(1) Askey スキームの最上位に位置する多項式に対して例外・多添字直交多項式を構成したが、Askey スキームの下位の色々な多項式に対しても例外・多添字直交多項式の構成が可能かどうかを、解ける量子力学模型を構成する事で調べる。

実数シフトの離散量子力学において、 $(q-)$ Racah 多項式が現れる系を基にして、形状不変な解ける模型及び例外・多添字直交多項式を構成したが、Askey スキームの下位の色々な多項式が現れる系に対して、仮想状態除去法を用いて形状不変な解ける模型及び例外・多添字直交多項式が構成出来るかを調べる。 $(q-)$ Racah 多項式は座標の取り得る値が有限個であったが、Askey スキームの下位の多項式では座標の取り得る値が無数個の系もあり、その場合には有限個の場合とは違った特徴が現れる事が予想される。

虚数シフトの離散量子力学において、 (Askey-) Wilson 多項式が現れる系を基にして、形状不変な解ける模型及び例外・多添字直交多項式を構成したが、Askey スキームの下位の色々な多項式が現れる系に対して、仮想状態除去法を用いて形状不変な解ける模型及び例外・多添字直交多項式が構成出来るかを調べる。得られた系が非特異であるための条件の解析は困難が予想される。

仮想状態の条件を少し緩めた擬仮想状態を除去しようとした場合に、複数個の擬仮想状態を除去して非特異な系を得るための条件を、通常の量子力学系に関して考察する。

(2) 通常の直交多項式が素直に現れる量子力学系ではシヌソイダル座標が重要な役割を果たしていたが、例外・多添字直交多項式が現れる系でもその性質が引き継がれているかを明らかにする。

通常の直交多項式が素直に現れる量子力学系ではシヌソイダル座標が閉関係式を満たし、それを用いて生成消滅演算子を自然に構成出来る事は報告者達によって示されたが、例外・多添字直交多項式が現れる系でも生成消滅演算子を自然に構成する事が出来るかを明らかにする。

通常の直交多項式が現れる元の系では、シヌソイダル座標を用いた統一的な理解が可能であったが、ポテンシャル関数の分母部分を拡張する事により、例外・多添字直交多項式が現れる系に対しても同様な統一的な理解が可能かどうかを考察する。

シヌソイダル座標を用いた離散量子力学系の統一的な取り扱い具体例編は、かなりの部分の計算が終わっているのであるが、報告者達の精力が例外・多添字直交多項式に移ってしまったために放置されており、これを完

成させる。

(3) 応用的な話題として

実数シフトの離散量子力学系で様々な解ける模型が得られたので、これを出生死亡過程と解釈して、興味深い性質がないかを調べてみる。

実数シフトの離散量子力学系で様々な解ける模型が得られたので、これを出生死亡過程と解釈して、興味深い性質がないかを調べてみる。

4. 研究成果

(1) 新しい多添字直交多項式と解ける量子力学模型の構成

Meixner, リトル q -Laguerre, リトル q -Jacobi 多項式で記述される実数シフトの離散量子力学系に仮想状態除去法を適用して新しい解ける量子力学系を得る事で、Meixner, リトル q -Laguerre, リトル q -Jacobi の多添字直交多項式を構成した。以前に構成した $(q-)$ Racah 多添字直交多項式の場合との違いは、それらが有限系であったのに対して今回のものは無限系である点である。仮想状態ベクトルは $(q-)$ Racah の場合では座標の最大端点で Schrödinger 方程式を満たしていなかった。今回のものは Schrödinger 方程式を全ての点で満たしているが、無限系である事からノルムが無限大になっている。[論文] この成果は直交関係式が Jackson 積分で与えられる系を考える際に役立つと思われる。

(2) 多添字直交多項式の性質

通常の直交多項式の特徴付けとして 3 項関係式があるが、例外・多添字直交多項式は通常の多項式ではないため 3 項関係式を満たさない。3 項関係式に相当する再帰関係式があるだろうと推測はされていたが、一番簡単な場合にしか分かっていた。多添字直交多項式は元の直交多項式に Darboux 変換を繰り返し施す事で得られるが、この点に着目して、Laguerre, Jacobi, Wilson, Askey-Wilson の M 添字直交多項式が $2M+3$ 項の再帰関係式を満たす事を示す事が出来た。この場合には再帰関係式の係数は変数に依存している。[論文]

直交多項式の性質を調べる際や応用の際に、定数係数の再帰関係式が役立つ。Laguerre, Jacobi, Wilson, Askey-Wilson の多添字直交多項式が満たす定数係数の再帰関係式の予想を与え[論文], Laguerre, Jacobi の場合に照明を与えた[論文]。

この定数係数の再帰関係式を利用して、Laguerre, Jacobi, Wilson, Askey-Wilson の多添字直交多項式が現れる解ける量子力学系が一般化された閉関係式を満たし、生成消滅演算子を自然な方法で構成できる事を示した。[論文]

これらの結果は、研究計画時には何らかの再帰関係式は存在するであろうがそれを求める方法は皆目見当もつかなかったため、研究

計画には述べられていないものである。また、論文 は、科研費を用いて参加したスペインでの研究会で情報を仕入れ、アイデアの着想を得たものである。論文 の成果は、この分野の創始者達のグループに影響を与え、他の多項式へと応用された。

多添字直交多項式は仮想状態の次数とタイプという添字でラベルされているが、異なる添字を持つ多添字多項式が同じ多項式(但しパラメータはずれている)を与える場合がある事を示した。[論文] これは、科研費を用いて参加した台湾での研究会で情報を仕入れ、アイデアの着想を得たものである。

多添字直交多項式は Darboux 変換を繰り返し用いて構成されたので、ロンスキアンまたはカソラティアンの形で表されている。Laguerre, Jacobi の多添字直交多項式に対して、元の多項式の性質や行列式の性質を用いて、より簡単な行列式表示を与えた[論文]。Wilson, Askey-Wilson, Racah, q -Racah の多添字直交多項式に対しても、形状不変性の帰結である元の多項式の前進・後進シフト関係式やカソラティアンの性質を用いて、新しい行列式表示を与えた。[論文]

(3) 解ける量子力学模型の性質

仮想状態を種関数とした Darboux 変換は元の系と等スペクトルな系を与えるが、少し条件を緩めた擬仮想状態を種関数とした Darboux 変換は元の系に状態を追加した系を与える事を示し、様々な解ける模型にどのような仮想状態・擬仮想状態が存在するかを調べた。ロンスキアンの恒等式を利用して全体のスペクトルを明らかにした[論文]。離散固有状態が有限個しか存在しない解ける模型を調べ、新しい種類の仮想状態を見出した[論文]。虚数シフトの離散量子力学に対しても、様々な解ける模型に対して擬仮想状態を与え、カソラティアンの恒等式を利用して全体のスペクトルを明らかにした[論文]。これらの結果は他の研究グループに影響を与え、類似の結果が得られている。

解ける模型から新しい解ける模型を得る方法として、Darboux 変換の他に Abraham-Moses 変換がある。Darboux 変換を用いて多添字直交多項式を得る際に利用した仮想状態波動関数を一般化したものを種関数とする Abraham-Moses 変換を考察した。得られる系は非多項式型の固有関数を持つ。[論文]

Askey スキームに現れる直交多項式で励起状態が記述される離散量子力学模型を、シノソイダル座標を用いて統一的に理解する論文を 2010 年に出版した。その新しい具体例を、虚数シフトの離散量子力学模型に対して与えた。これは離散固有状態が有限個の系で、パラメータ q の絶対値が 1 の Askey-Wilson 多項式で励起状態が記述され、基底状態は q 量子ダイログ関数を用いて表される。[論文] この結果は数学者にも影響を与えている。

虚数シフトの離散量子力学模型で、無反

射ポテンシャルを系統的に構成する方法を与えた。ソリトンポテンシャルの離散量子力学を更に詳細に調べ、反射係数・透過係数の予想を与えた。[論文] この研究では q 超幾何関数の接続公式に対する考察が必要となるが、数学者との議論が促進された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

S.Odake, “New Determinant Expressions of the Multi-indexed Orthogonal Polynomials in Discrete Quantum Mechanics,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2017(5) (2017) 053A01 (36pp), 査読有
DOI:10.1093/ptep/ptx051

S.Odake and R.Sasaki, “Simplified Expressions of the Multi-indexed Laguerre and Jacobi Polynomials,” *SIGMA* 13 (2017) 020 (10pp), 査読有
DOI:10.3842/SIGMA.2017.020

S.Odake and R.Sasaki, “Multi-indexed Meixner and Little q -Jacobi (Laguerre) Polynomials,” *J. Phys. A: Math. and Theor.* 50 (2017) 165204 (23pp), 査読有
DOI:10.1088/1751-8121/aa6496

S.Odake, “Recurrence Relations of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials : closure relations and creation/annihilation operators,” *J. Math. Phys.* 57 (2016) 113503 (22pp), 査読有
DOI:10.1063/1.4966985

小竹 悟, “解ける量子力学模型と直交多項式”, 日本物理学会誌 第 71 巻, 第 3 号 (2016 年 3 月) 解説 156-163, 査読有
<http://www.jps.or.jp/members/books/files/gakkaishi/71-03.pdf>

S.Odake, “Recurrence Relations of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials : ,” *J. Math. Phys.* 57 (2016) 023514 (24pp), 査読有
DOI:10.1063/1.4941087

S.Odake and R.Sasaki, “Reflectionless Potentials for Difference Schrödinger Equations,” *J. Phys. A: Math. and Theor.* 48 (2015) 115204 (21pp), 査読有
DOI:10.1088/1751-8113/48/11/115204

S.Odake, “Recurrence Relations of the Multi-indexed Orthogonal Polynomials : ,” *J. Math. Phys.* 56 (2015) 053506 (18pp), 査読有
DOI:10.1063/1.4921230

S.Odake and R.Sasaki, “Solvable Discrete Quantum Mechanics : q -Orthogonal Polynomials with $|q|=1$ and Quantum Dilogarithm,” *J. Math. Phys.* 56 (2015) 073502 (25pp), 査読有

DOI:10.1063/1.4926351

S.Odake, “Equivalences of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials,” *J. Math. Phys.* 55 (2014) 013502 (17pp), 査読有

DOI:10.1063/1.4859795

S.Odake and R.Sasaki, “Casoratian Identities for the Wilson and Askey-Wilson Polynomials,” *J. Approx. Theory* 193 (2015) 184-209, 査読有
DOI:10.1016/j.jat.2014.04.009

S.Odake and R.Sasaki, “Non-polynomial extensions of solvable potentials a la Abraham-Moses,” *J. Math. Phys.* 54 (2013) 102106 (19pp), 査読有
DOI:10.1063/1.4826475

S.Odake, “Recurrence Relations of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials,” *J. Math. Phys.* 54 (2013) 083506 (18pp), 査読有
DOI:10.1063/1.4819255

S.Odake and R.Sasaki, “Extensions of solvable potentials with finitely many discrete eigenstates,” *J. Phys. A: Math. and Theor.* 46 (2013) 235205 (15pp), 査読有
DOI:10.1088/1751-8113/46/23/235205

S.Odake and R.Sasaki, “Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states,” *J. Phys. A: Math. and Theor.* 46 (2013) 245201 (24pp), 査読有
DOI:10.1088/1751-8113/46/24/245201

[学会発表](計 9 件)

小竹悟, 佐々木隆, 解ける離散量子力学模型と Meixner, little q -Jacobi (Laguerre) 多添字直交多項式, 日本物理学会第 72 回年次大会, 2017.3.20, 大阪

小竹悟, 解ける量子力学模型と一般化された閉関係式, 日本物理学会 2016 年秋季大会, 2017.9.21, 宮崎

小竹悟, 佐々木隆, big q -Jacobi 多項式と離散量子力学, 日本物理学会第 71 回年次大会, 2016.3.20, 仙台

小竹悟, 佐々木隆, 離散量子力学における無反射ポテンシャルの構成とソリトンポテンシャル, 日本物理学会 2015 年秋季大会, 2015.9.27, 大阪

小竹悟, 佐々木隆, 解ける量子力学模型と $|q|=1$ の Askey-Wilson 多項式, 日本物理学会 2014 年秋季大会, 2014.9.21, 佐賀

S.Odake, Some Properties of the Multi-indexed Orthogonal Polynomials, Exceptional orthogonal polynomials and exact solutions in Mathematical Physics, 2014.9.8, Segovia(Spain)

小竹悟, 佐々木隆, 解ける量子力学模型の Abraham-Moses 流の非多項式的拡張,

日本物理学会第 69 回年次大会，
2014.3.28，平塚
小竹悟，解ける量子力学模型と新しい直
交多項式の再帰関係式，日本物理学会
2013 年秋季大会，2013.9.22，高知
S.Odake，Exactly Solvable Difference
Schrödinger Equations，Summer School
on Integrability in Quantum and
Statistical Systems，2013.8.9，台北(台
湾)

〔その他〕

ホームページ等

<http://azusa.shinshu-u.ac.jp/~odake/paper.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小竹 悟 (ODAKE, Satoru)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：4 0 2 5 2 0 5 1

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()