様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００００９

研究課題名（和文）マッチングの組合せ論とその応用

研究課題名（英文）Enumerative combinatorics on matchings and its application

研究代表者
沼田　泰英（NUMATA, Yasuhide）

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：００４５５６８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，グラフのマッチングと呼ばれる組合せ論的対象を中心に，数え上げ組合せ論の手法を用いて研究を進め，組合せ論に関連するいくつか研究成果を得ました．
直接マッチングに関連する研究成果としては，既約ピタゴラス数をマッチング数と呼ばれる不変量で実現するようなグラフの三つ組の構成について，ある条件の下ではただ一組しかないことを示しました． また，直接マッチングには関連しない周辺分野においては，ヤング図形の組合せ論的性質に関していくつかの研究成果を得ました．

研究成果の概要（英文）：We studied on matchings ingraphs mainly, and obatained some results on enumerative combinatorics by this research.
We showed the uniqueness of the family of triples whose mathing numbers are pitagorian tripes in some condition. We also obtained some results on Young diagrams and Young tableaux.

研究分野：数え上げ組合せ論

キーワード：母関数　数え上げ　ヤング図形　マッチング　組合せ論

１．研究開始当初の背景

本研究が研究対象にするのは，マッチングや二分木，またそれらに関連する組合せ論的対象であり，特に，全単射の構成や重み付き母関数といった数え上げ組合せ論的な性質に興味がある． (1)で述べるように，マッチングと呼ばれるものは比較的代数的に取り扱いやすい組合せ論的対象の一つである．また，(2)で述べるように，その重み付き母関数のうちのいくつかは応用上有用なものもありよく研究されている． 一方で，(4)で述べる二分木のある不変量の総和を与える公式は，組合せ論の観点から興味深い形をしているが組合せ論的な研究はあまり進んでいるようには見えない． しかしながら，(3)で述べるように，マッチングと二分木の間には対応がある． マッチングと二分木の間の対応をうまく構成をすれば，その不変量をより代数的に扱いやすいマッチングの言葉に翻訳できる可能性がある．

(1) グラフが与えられた時，ある頂点から伸びる辺の数のことをその頂点の次数と呼ぶ．完全マッチングというのは，どの頂点の次数もちょうど 1 であるようなグラフのことである． 以下の説明ではグラフの頂点には 1 から 2n までのラベルが振られているものとする． このとき，完全マッチングは 2n 次対称群の剰余類として実現することができ，代数的に取り扱うことも出来る． また，完全マッチングは二部グラフの最も簡単な例のうちの一つとして捉えることもでき，基本的な研究対象のうちの一つである． 完全マッチングは，グラフ理論的な興味からの研究，最適化問題の様な応用分野からの研究など様々な視点からの様々な研究が行われている．

(2) Pfaffian や Hafnian と呼ばれる多項式は，Determinant や Permanent の類似物と考えることができる． 一方，Pfaffian や Hafnian は完全マッチングの重み付き母関数として定義できる多項式である．Pfaffian についても多くの研究があり，その文脈の中でも完全マッチングについて研究がされている．また，Pfaffian や Hafnian の類似物 (α というパラメータが入っておりそのパラメータを退化させると通常の Pfaffian や Hafnian と一致するという性質をもつ多項式) も定義されており，例えば，実 Wishart 分布と呼ばれる実対称行列の確率分布でのモーメントと呼ばれる不変量を記述するために用いることができる．これらの類似物も，完全マッチングの重み付き母関数として定義できる．

(3) 根と呼ばれる頂点が一つ指定されており，根の次数は 2 か 0，それ以外の頂点の次数は 1 か 3 である様な連結なグラフのことを根付き非順序全二分木と呼ぶ．次数が 1 以下である頂点のことを葉と呼ぶが，葉に 1 から m までのラベルが一つづつ振られているものをここでは非順序二分木と呼ぶ．これらは文脈によっては (距離の入っていない) 系統樹と呼ばれることもある．頂点の数が $2(m-1)$である様な完全マッチングの総数と葉の数が m である様な非順序二分木の総数は等しくなることが知られている．従って，頂点の数が $2(m-1)$ である様な完全マッチングのなす集合と葉の数が m である様な非順序二分木のなす集合の間には全単射が存在することがわかるが，その具体的な対応の与え方がいくつか知られている．

(4) 一方，情報理論分野における研究では，1 対多の暗号プロトコルの効率の研究という文脈において，`通信コスト' と呼ばれる非順序全二分木の不変量を扱われており，この不変量の非順序全二分木に渡る総和などについて研究されている． この `通信コスト' の総和を与える公式は，組合せ論の観点から興味深い形をしている． しかし，この不変量を保存するような，全単射についての議論はされていない．

２．研究の目的

本研究では，数え上げ組合せ論の視点から組合せ論的対象の性質について研究を行う．特に完全マッチングやそれに関連または類似する組合せ論的対象の組合せ論的性質について研究を行う． 研究対象の重み付き母関数として定義されるようないくつかの関数の振る舞いについて観察をすることで，その不変量や組合せ論的性質を代数的な視点から考察する． 一般に，重み付き母関数はその重みの定義の仕方により様々なものが定義できる． 重み付き母関数として定義できる関数の中には，情報科学や統計学の文脈でも考察されているものもある． 本研究で得られた組合せ論的な性質や振る舞いをそれぞれの分野へフィードバックすることで，他分野への応用することや新たな数学的問題の発掘するといったことも試み，研究の深化に貢献するということが本研究の目的である．

３．研究の方法

本研究では，組合せ論的対象の不変量やそれを保存する全単射，重み付き母関数など数え上げ組合せ論の手法を用いて研究を行う． 当初の研究計画における，主たる研究対象は非順序二分木と完全マッチングである． 非順序二分木と完全マッチング自体や非順序二分木と完全マッチングの間の全単射について研究を行い，さらにその研究で得られた知見を生かし，関連するまたは類似する組合せ論的対象に対しても考察を行い研究を行う．
非順序二分木と完全マッチングに対して行う研究では，それらの間の全単射を構成し，

非順序二分木の不変量を完全マッチングへ翻訳し，より扱いやすい形に書き直すことがひとつの目標である． 目的に沿った良い対応を構成するために，まず，計算実験などで完全マッチングの組合せ論的な性質を精査し，構成すべき対応が持つべき性質を調べ，理論的かつ具体的に対応を構成する際の足掛かりとする．
その一方で，研究をより深みのあるものにし，他分野への応用などのきっかけを得られるよう，関連する分野の研究者と議論をするということも積極的に行う． より良い対応の構成といった計画に直接関係することの他，得られた成果の他分野への応用なども視野に入れ議論をする． そのため，周辺分野への研究集会等へも参加や，研究集会の開催するなどする．

４．研究成果
(1) マッチング数とピタゴラス数に関する成果:
マッチング数もしくは Hosoya index という名前で呼ばれるグラフの不変量はそのグラフの中の(完全とは限らない)マッチングの総数として定義される． 特に，毛虫グラフと呼ばれる特別な木グラフのクラスを考えると，マッチング数は連分多項式などと密接に関連しており大変興味深い． マッチング数を考えるとピタゴラス数になるような毛虫グラフの三つ組について考察した．
ピタゴラス数が与えられた時に，拡張ユークリッド互除法から得られるデータを元に毛虫グラフを構成し，その毛虫グラフのコピーを 2 つ作り，芯と呼ばれるグラフの三つ組に貼り合わせることで，マッチング数が与えられたピタゴラス数になるような毛虫グラフの三つ組を構成できることが知られている． 既約ピタゴラス数を脚の長さの比により 2 つのクラスにうまく分類すると，マッチング数がピタゴラス数になるようなグラフを構成する際に必要となる芯を，それぞれのクラスにおいて共通に取ることができることが知られており具体的に与えられている． 共通の芯を用いて，マッチング数が既約ピタゴラス数になるような毛虫グラフ達を構成することを考えた時，芯となりうるグラフの三つ組の唯一性を示すことができた． また，さらに，毛虫グラフを貼り合わせるという仮定を外し，毛虫グラフとは限らない一般のグラフを貼り合わせるという条件に置き換え，一般化した設定にしても，芯の候補の唯一性は変わらないという結果を得た． この結果により，ある種の対称性を持ったグラフのマッチング数でピタゴラス数を表そうとすると，そのグラフの形状は限られたものであるという事がわかる．
これらのグラフに関する重み付き母関数がどのような振る舞いをするかについては今後の課題である．

(2) ヤング図形上の集合値半標準盤および逆平面分割の重み付き母関数に関する成果:
ヤング図形上の集合値半標準盤および逆平面分割(reverse plane partitions)の重み付き母関数は，Schur 多項式の K 理論版であると思うことができる様な多項式であり，それぞれ Grothendieck 多項式， dual Grothendieck 多項式と呼ばれている． Schur 多項式にはその無限和に関する公式として，Cauchy 公式と呼ばれるものがよく知られている． Grothendieck 多項式に対する同様の公式を Lascoux と Naruse が与えている．この公式は重み付き母関数に対する等式であるので，重みを保存する全単射の存在を示唆する． 一方で別の文脈において，bumping と sliding というよく知られたアルゴリズムを組み合わせることで，集合値半標準盤と逆平面分割の間の全単射を与えるアルゴリズムが，Bandlow と Morse により構成されている． このアルゴリズムの性質を考察することで，Lascoux と Naruse によって与えられた重み付き母関数に対する等式の別証明を与えることができるということを指摘した．

(3) 小圏を用いた数え上げ組合せ論的対象に関する成果:
代数的組合せ論の分野で広く研究されているアソシエーションスキームの圏論的視点からの拡張である schemoid について研究を行った． 特に，schemoid の構造をもつ小圏を与えられた半順序集合から構成する方法を与えるということ，及び，schemoid の構造を保存するような関手のなす圏についての研究を行い成果を得た．

① Schemoid の構造を保存するような関手のなす圏について:
Schemoid の構造を持つ亜群から別の schemoid への関手について考える． この関手のなかで schemoid の構造を保つものは限られており，そのような関手の特徴付けを与えることができた． より具体的には，次の様になっている: あるアルゴリズムにより亜群の schemoid 構造から別の亜群を構成する． Schemoid の構造を持った亜群から新しく構成した亜群への自然な関手が存在する． この関手と，新しく構成した亜群から別の schemoid への関手の合成は，schemoid の構造を保つ関手である． 逆に，schemoid の構造を保つ関手は必ずこの様な分解を持っている．
この特徴付けにより，Schemoid の構造を持つ亜群から別の schemoid への関手のうち schemoid の構造を保つものを対象とし，schemoid の構造と互換性のある自然変換を射とするような圏に対する考察が容易になる． 特に，Schemoid の構造を持つ亜群から構成された亜群からの関手圏を考えること

に帰着できることがわかる.

② 半順序集合から schemoid を構成する方法について:
Bool 束をプロトタイプとして, Bool 束の様な性質をもつ半順序集合から schemoid を構成する方法を与えた. 具体的には, Bool 束には差集合をとるという操作があるが, これを抽象化した公理を満たす演算を持つ半順序集合に対し, schemoid を構成する方法を与えた. また, Bool 束には直和をとるという操作があるが, これを抽象化した公理を満たす演算を持つ半順序集合に対しても, schemoid を構成する方法を与えた.
我々が半順序集合から構成した小圏およびその schemoid 構造は, 元となる半順序集合の組合せ論的構造を多く反映しており, schemoid から構成される schemoid 代数という環も組合せ論的な情報を多く含んでいる. 例えば, Coxeter 群の Bruhat 順序による半順序集合から構成した場合その schemoid 代数は nilCoxeter 代数になり, マトロイドの閉集合(flats)のなす半順序集合から構成した場合その schemoid 代数は nilMoebius 代数と呼ぶべきものとなる.
完全二分木は自然に半順序集合だと思うことができる. 従って, この構成を, 完全二分木に対しても適用することで, 完全二分木の組合せ論的情報を持った代数を構成し, その代数の構造から完全二分木を研究することが考えられるが, これらについては, 今後の課題である.

(4) 関連する周辺分野との研究交流を目的とした研究集会の開催:
平成 26 年度には京都大学数理解析研究所で組合せ論的表現論と表現論的組合せ論に関する研究集会を開催した.
また, 平成 28 年度には国際研究集会 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2016) in Kyoto のサテライト mini-symposium として, Enumerative Combinatorics を開催した.

5. 主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
① Hajime Nagoya, Yasuhide Numata;
Toward a combinatorial formula for an irregular conformal block of rank one,
Josai Mathematical Monographs (Representation Theory and Differential Equations : Proceedings of JMM Workshop on Representation Theory and Differential Equations,November 26-27,2023 Josai University) 10 (2017) 81-95 . (査読あり)

② Tomoe Kadoi, Yasuhide Numata;
On graphs whose Hosoya indices are primitive Pythagorean triples,
Notes on Number Theory and Discrete Mathematics 22(2016) 59-80. (査読あり)

〔学会発表〕（計 2 件）
① Yasuhide NUMATA;
On combinatorics of a K-theoretic analogue of Schur functions,
Workshop and Seminar on Topological Combinatorics and Related Topics
2015 年 01 月 07 日, Kasetsart University, Bangkok, Thailand.

② Tomoe Kadoi, Yasuhide Numata;
On graphs whose Hosoya indices are primitive Pythagorean triples,
Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics,
2014 年 05 月 17 日, Nihon University.

〔図書〕（計 1 件）
① T. Harima, T. Maeno, H. Morita; Y. Numata, A. Wachi, J. Watanabe;
The Lefschetz Properties, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2080,
Springer Berlin Heidelberg,
2013, 250.

6. 研究組織
(1)研究代表者
沼田 泰英（NUMATA, Yasuhide）
信州大学・学術研究院 理学系・准教授
研究者番号： 00455685