

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800061

研究課題名(和文)量子系の条件付き対称完全正作用素値測度に関する研究

研究課題名(英文)Study of Conditional SIC-POVM

研究代表者

大野 博道(OHNO, Hiromichi)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号：90554585

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：量子状態を観測する場合、観測には正作用素値測度が用いられるが、観測により量子状態の情報を完全に知ることができ、かつ最も効率の良い正作用素値測度として、SIC-POVM(対称完全正作用素値測度)が知られている。本研究では観測する量子状態の情報の一部が既知である場合に、最も効率の良い観測が行える正作用素値測度である条件付きSIC-POVMについて研究を行い、条件付きSIC-POVMが存在するための必要条件と、いくつかの例を構成した。

研究成果の概要(英文)：The state of a quantum system is a density matrix with several parameters. The concern is how to recover the parameters. Several possibilities exist for the optimal recovery method, and we consider some special cases. We assume that a few parameters are known and that the others are to be recovered. The optimal positive operator valued measure (POVM) for recovering unknown parameters with an additional condition is called a conditional symmetric informationally complete POVM (SIC-POVM). We study the existence or nonexistence of conditional SIC-POVMs. We provide a necessary condition for existence and some examples.

研究分野：量子情報理論

キーワード：量子情報理論 量子トモグラフィー

1. 研究開始当初の背景

量子とは、物質の最小単位を表すものであり、例として電子や光子などが挙げられる。量子系とは、この量子を数学的に表す枠組みであり、具体的にはヒルベルト空間上の有界線型作用素のなす環で表されている。特にヒルベルト空間が有限次元であるときには、量子系は行列環で表されている。この量子系上の量子状態を観測するための手段として用いられるのが正作用素値測度である。特に、量子状態を完全に知ることができる完全正作用素値測度として、MUB (mutually unbiased bases) と SIC-POVM があり、これまでこの2つの完全正作用素値測度の研究が多く行われてきた。

MUB はヒルベルト空間の正規直交基底の集合で、異なる基底に属するベクトルの内積の絶対値が特定の値をとるものことである。ヒルベルト空間の次元 d に対し、MUB の基底の個数が $d+1$ 個であるとき、その MUB から完全正作用素値測度を構成できることが知られている。MUB の研究は 1980 年代に多く行われており、ヒルベルト空間の次元 d が素数のべき乗の場合には、 $d+1$ 個の基底を持つ MUB が存在することが知られている。一方で、ヒルベルト空間の次元 d が素数のべき乗でない場合の、MUB の基底の最大個数については未解決であるが、予想ではその個数は $d+1$ 個に満たず、MUB から作られる完全正作用素値測度が存在しないとされている。

ヒルベルト空間の次元が素数のべき乗でない場合には、MUB から作られる完全正作用素値測度が存在しないという予想を受けて、MUB とは異なる方法で完全正作用素値測度を構成する方法が考えられた。それが 2000 年ごろから研究されている SIC-POVM である。SIC-POVM は d 次元ヒルベルト空間における d^2 個のベクトルの集合で、どの2つのベクトルの内積の絶対値も同じ値をとるものである。SIC-POVM は現在までにヒルベルト空間の次元が 15 次元以下の場合には存在することが知られており、またコンピュータによる解析で、60 次元程度までは存在すると予想されている。そのため、全ての次元において SIC-POVM が存在することが期待されているが、今のところまだ SIC-POVM の存在は証明されていない。

SIC-POVM は量子状態を最も効率よく観測する完全正作用素値測度として知られているが、それ以外にも量子情報分野への応用が数多く期待できる。例えば量子暗号において、もっとも盗聴され難い暗号を作る場合、この SIC-POVM が必要となる。

一方で、SIC-POVM は数学の他の分野とも繋がりが深い。例えば、ベクトルの内積という点に注目すれば、frame 理論に結び付くし、ベクトルの幾何的な構造に注目すれば design 理論に結び付く。また、ベクトルから構成される射影作用素や、ベクトルを写すユニタリ作用素を考えれば、作用素論・作用素

環論との繋がりもある。このように量子情報の分野だけでなく、数学的にも非常に意義のある研究である。

この SIC-POVM を一般化し、観測する量子状態の情報がある程度既知である場合に拡張したものが条件付き SIC-POVM である。SIC-POVM は量子状態の情報を全て知ることのできる完全正作用素値測度であるので、情報がある程度既知の量子状態を SIC-POVM で観測すると、すでに知っている情報も得ることになってしまうため、無駄が生じてしまう。このような無駄が出ないように考えられたのが条件付き SIC-POVM である。条件付き SIC-POVM は 2012 年 Petz, Ruppert により考案され、今後の研究が期待されている。

2. 研究の目的

条件付き SIC-POVM の研究は新しい研究であるため、まだ知られている例が少なく、応用上有用な場合についても、その存在や構成方法などがわかっていない。そのため、まずは条件付き SIC-POVM の具体例を多く作りたい。特に、2つの量子系の結合系の、部分系の片方あるいは両方の情報がわかっている場合や、正規直交基底による観測結果が得られている場合など、応用上有用なものについて調べたい。

次に、得られた例をもとにして、条件付き SIC-POVM が存在するための必要条件、十分条件を調べたい。SIC-POVM の研究の難しさの原因の一つは、扱わなければならない変数が非常に多いことである。例えば 4 次元のヒルベルト空間上で SIC-POVM を作る場合、 4×4 行列が 16 個必要になるため、単純に考えれば変数が 256 個必要になり、例を一つ作りだすだけでも膨大な時間がかかってしまう。(もちろん、与えられた条件から変数は多少減るのだが。) 条件付き SIC-POVM についても同様の難しさがあり、ヒルベルト空間の次元が高くなると、計算によって求めることはかなり難しくなる。そのため、このような難しさが表れないような十分条件や必要条件を見つけない。さらに、十分条件が満たす場合にはその構成方法を確立し、また、必要条件を満たさない場合は、条件付き SIC-POVM に代わる、量子状態の観測に最も効率のよい POVM を構成したい。

条件付き SIC-POVM の研究は、量子情報の分野への応用が数多く期待できる。例えば、この条件付き SIC-POVM は観測する量子状態がある程度既知である場合に、もっとも効率の良い完全正作用素値測度を与えるものである。量子状態の観測に用いる具体的な観測方法を与えることができる。また SIC-POVM が量子暗号分野において、最も盗聴に強い通信方法を与えるものであるため、条件付き SIC-POVM も特定条件下で最も盗聴に強い通信方法を与えることが期待される。

また SIC-POVM は条件付き SIC-POVM に含まれるため、本研究から SIC-POVM の存在につ

いての結果が得られる可能性は高い。SIC-POVMの存在が証明されれば、数学においても、design理論における未解決問題である2-designの存在や、frame理論における未解決問題である(ある条件の下での) tight frameの存在が証明されることとなる。また作用素環論においても、部分環同士のcomplementaryやangleと呼ばれる関連性の解析や、Generalized Pauli groupやクリフォード群(Clifford group)といったいくつかのユニタリ部分群の解析など、多くの応用が期待できる。

3. 研究の方法

これまで、SIC-POVMの研究は数多く行われており、15次元以下のヒルベルト空間ではSIC-POVMが存在することが知られている。またコンピュータによる解析で、60次元程度までは存在すると予想されている。一方で条件付きSIC-POVMは2012年にPetz, Ruppertにより提唱された(Petz, Ruppert, J. Phys. A, 45, 2012)新しい概念であるため、知られている例は多くない。上記の論文においてPetz, Ruppertにより、量子状態の対角成分が既知である場合の条件付きSIC-POVMが構成されたが、実際に構成するためにはヒルベルト空間の次元にも条件が必要となってしまうなど、不完全なものになっている。

本研究では、まず条件付きSIC-POVMの具体例について、その存在の有無や構成方法について調べた。例えば、2つの量子系の結合系上の量子状態を2つの部分系に制限した場合、片方または両方の情報が既知である場合、2つの部分系の量子状態が一致している場合、2つの部分系の量子状態が単位行列と一致している場合といった、結合系に関する例や、いくつかの正規直交系による観測結果がわかっている場合といった、他のPOVMによる観測結果がわかっている例など、量子情報理論での応用上特に有用と思われるものについて研究を行った。

さらに、条件付きSIC-POVMが存在するための必要条件について研究を行った。量子状態のどの情報が既知であれば、残りの情報を知るための条件付きSIC-POVMの構成が可能なのか、あるいは不可能なのかということについて研究を行った。

4. 研究成果

本研究の成果として、まずいくつかの条件付きSIC-POVMの例を構成することができた。例えば、対角成分が既知である量子状態について、その情報を完全に知ることができる最も効率の良い条件付きSIC-POVMを低次元の場合に、具体的に構成した。

また、条件付きSIC-POVMが存在するための必要条件の一つを明らかにした。これを用いて、高次元の対角成分が既知である量子状態を観測する条件付きSIC-POVM, MUBを補完する条件付きSIC-POVM, 縮約状態にある種の

条件を課した量子状態を観測する条件付きSIC-POVMなどについて考察した。その結果、縮約状態にある種の条件を課した量子状態を観測する条件付きSIC-POVMが存在しないことを示すことができた。これまでの正作用素値測度の研究では、非存在を証明した研究結果は非常に少なく、しかも、この数少ない非存在の証明のほとんどは、低次元の場合のものであった。本研究の非存在の証明は、任意の次元において行われているため、これまでの研究に照らし、とても重要な結果である。

また、本研究では量子情報理論と関わりの深い量子ウォークについても研究を行った。特に、量子ウォークのユニタリ同値性とSzegegyウォークに関する研究を行い、ユニタリ同値により不変である量子ウォークの性質と、Szegegyウォークになるための必要十分条件を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Yasumichi Matsuzawa, Hironichi Ohno, Akito Suzuki, Tatsuya Tsurii, Satoe Yamanaka, Non-commutative hypergroup of order five, Journal of Algebra and Applications, 査読有, 印刷中, DOI: 10.1142/S0219498817501274.

Hironichi Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, Quantum information Processing, 査読有, 15, 2016, 3599-3617.

Hironichi Ohno, Denes Petz, Examples of conditional SIC-POVMs, Quantum information Processing, 査読有, 14, 2015, 3983-3999.

[学会発表](計7件)

大野博道, 1次元量子ウォークのユニタリ同値性について, 日本数学会2016年度秋季総合分科会, 2016年9月15日-18日, 関西大学(大阪府吹田市)

Hironichi Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, RIMS研究集会「作用素環論の最近の進展」, 2016年9月12日-14日, 京都大学(京都府京都市)

大野博道, 条件付きSIC-POVMとその例, 作用素論・作用素環論研究集会, 2015年10月24日-26日, KKR 妙高高原白樺荘(新潟県妙高市)

Hironichi Ohno, Existence of conditional SIC-POVM, Workshop on Quantum Information Theory and Related Topics, 2015年9月1日-3日, Hanoi(Vietnam)

Hironichi Ohno, A new approach to quantum state tomography, Workshop on quantum information theory and related

topics, 2014年9月4日 - 6日, 立命館大学
(滋賀県草津市)

Hironichi Ohno, Necessary condition
for existence of conditional SIC-POVM,
RIMS 研究集会「不確実さと曖昧さの数理」,
2014年1月8日 - 10日, 京都大学(京都府
京都市)

Hironichi Ohno, Examples of
conditional SIC-POVM, The first
international workshop on quantum
information theory and related topics,
2013年8月19日 - 21日, Da Nang(Vietnam)

[その他]

ホームページ等

[http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/
ja.yFTmbpkh.html](http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.yFTmbpkh.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大野 博道 (OHNO, Hironichi)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号: 90554585