二相系格子ボルツマン法による混相流シミュレーション

Numerical Simulation of Multiphase Flow by the Two-Phase Lattice Boltzmann Method

吉野　正人（信州大学）
Masato YOSHINO (Shinshu University)
e-mail: masato@shinshu-u.ac.jp

１．はじめに

格子ボルツマン法[1-3]（Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と記す）は，1990 年代以降開発が進んできた非圧縮性粘性流体の比較的新しい数値計算法である．LBM では，気体分子運動論のアナロジーを利用して, 流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体（格子気体モデル）で近似し，各粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し, そのモーメントから巨視的な流れ場や温度（濃度）場を計算する．LBM の特長は，複雑流れに対してもアルゴリズムが簡単であることや, 並列計算に向いていることなどがあげられる. そのため, これまでに多孔質内流れなどの複雑な境界をもつ流れや，気液・液液二相流などの界面が複雑に変形する流れに適用され成功を収めている.

本稿では，特に微小スケールの混相流現象（液滴の挙動や変形する物体を含む流れ）に焦点を当て，筆者らの最近の研究成果を紹介する.

２．二相系流れの LBM モデル

これまでに提案されている二相系 LBM のモデルは，大別すると(i) Color-Gradient モデル[4]，(ii) Pseudopotential モデル[5]，(iii) Free-Energy モデル（Phase-Field モデル）[6]に分類される[7]．このうち(iii)のモデルは，非平衡熱力学に基づく系の自由エネルギーを導入した方法であり, 二相の界面形状は系の自由エネルギーが最小となるように自律的に変形して決まる．Swift ら[6]が提案した最初のモデルは, 数値安定性の問題から二相流体の密度比に限界（せいぜい 10 程度くらいまで）があり，高密度比の二相流を扱える LBM の開発が望まれていた. これに対し Inamuro ら[8]は，Free-Energy モデルをベースに Projection 法[9]を導入した高密度比の二相系 LBM を開発し，本手法を用いることにより，例えば水－空気系に代表される密度比 1000 程度の計算を安定に実行することができると報告している．

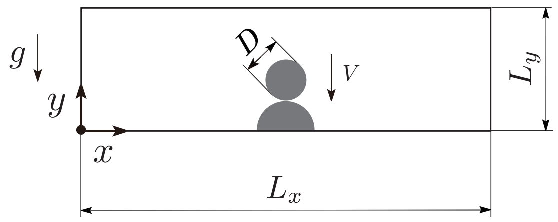

図 1　固体壁面上における液滴衝突

以下では，3.4 節を除き，この高密度比の二相系 LBM を用いて計算を行った. LBM の速度モデルとしては，3.1 節では 2 次元 9 速度モデル[10]，それ以外では 3 次元 15 速度モデル[10]を用いた. なお, 特に断らない限り，変数は適切な代表量（基準量）を用いて無次元化されたものである. 計算手法および定式化の詳細は，文献[8]を参照されたい.

３．数値計算例

3.1　固体壁面上での液滴の衝突・混合現象の解析

固体壁面上における液滴の衝突・混合現象は，例えばスプレーコーティングなどで見られるように，工業的にも重要な現象の一つである．ここでは，固体壁面上で静止する液滴に別の液滴が衝突・混合する際の動的な挙動について, 二次元計算を行った結果[11]を述べる.

図 1 に示すような$L_x \times L_y$の計算領域に対して，$y = 0$の固体壁面上に静止する直径Dの液滴（液滴 A）に，同じ大きさの別の液滴（液滴 B）が上方から衝突する場合を考える. 重力は$-y$方向に作用する（重力加速度をgとする）．$y = 0$の固体壁には濡れ性を考慮したすべりなし境界条件, $y = L_y$では各物理量の勾配が 0 のノイマン条件, 左右の境界には周期境界条件を用いた. 本問題の無次元パラメータは，液相密度ρ_{L}と気相密度ρ_{G}の比（$\rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{G}}$），液相粘度$\mu_{\mathrm{L}}$と気相粘度$\mu_{\mathrm{G}}$の比（$\mu_{\mathrm{L}}/\mu_{\mathrm{G}}$），液相基準のレイノルズ数$Re = \rho_{\mathrm{L}} DV/\mu_{\mathrm{L}}$，液相基準のウェーバー数$We = \rho_{\mathrm{L}} DV^2/\sigma$（$\sigma$：界面張力），およびフルード数$Fr =$

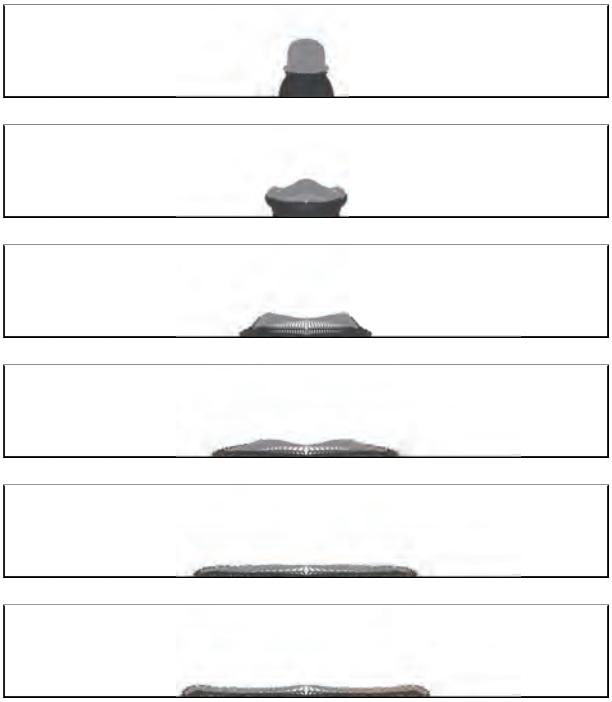

図 2　液滴形状の時間変化（$We = 10,\ \theta_{\mathrm{s}} = \pi/2$）

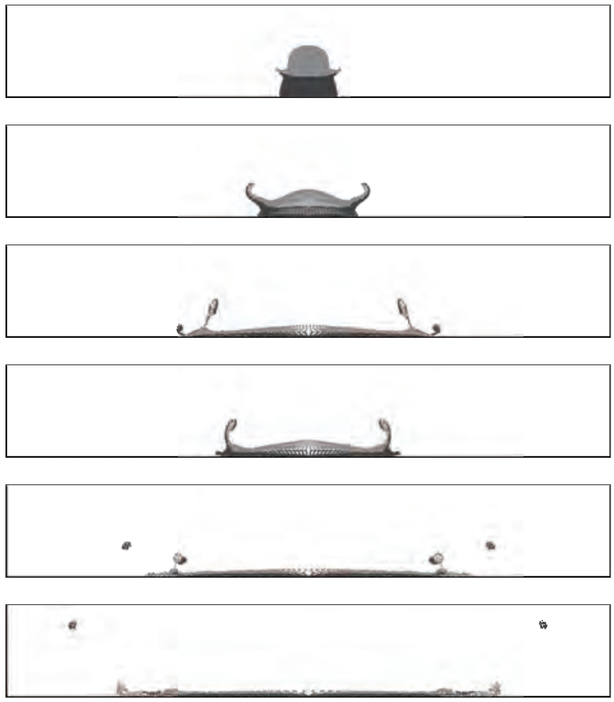

図 3　液滴形状の時間変化（$We = 100, \theta_{\mathrm{s}} = \pi/2$）

$V/\sqrt{gD}$であるが，一般に，液滴の直径は 2～3mm 程度であることを考慮すると，ウェーバー数が支配パラメータであり，その違いによって液滴の挙動は大きく異なると考えられる．本計算で用いた主なパラメータの値は，$L_x \times L_y = 1500\Delta x \times 450\Delta x$，$D = 100\Delta x$，$\rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{G}} = 50$（$\rho_{\mathrm{L}} = 50$，$\rho_{\mathrm{G}} = 1$），$\mu_{\mathrm{L}}/\mu_{\mathrm{G}} = 55.6$（$\mu_{\mathrm{L}} = 2.27 \times 10^{-2}\Delta x$，$\mu_{\mathrm{G}} = 4.08 \times 10^{-4}\Delta x$），$g\Delta x = 1.07 \times 10^{-10}$，$V = 3.32 \times 10^{-3}$（$\Delta x$：空間の格子間隔）であり，その他の値は文献[11]を参照していただきたい．

結果の一例として，固体壁面の静的接触角を$\theta_{\mathrm{s}} = \pi/2$とし，$We = 10$および$100$に対する液滴形状の時間変化をそれぞれ図 2，図 3 に示す（各図は，計算領域の下半分 $0 \le \mathrm{y} \le L_{\mathrm{y}}/2$ のみを表示している）．これらの図は，液滴 A と B を区別するために，二色のトレーサ粒子をそれぞれの液滴に埋め込み，その挙動を四次のルンゲ･クッタ法によって計算した結果を表示したものである．$We = 10$のケース（図 2）では，液滴 B が液滴 A の上に衝突した際に，飛び散ることなく壁面上に広がる結果が得られている．一方，$We = 100$のケース（図 3）では，衝突後二つの液滴が合一した両端部分にリムと呼ばれる特徴的な突起部が形成されている．また，合一した液滴は壁面近傍で分裂し，ほぼ液滴 A で構成された微小液滴が生成されている．その後，この微小液滴が飛散していく間に，合一した液滴は A と B の両方の液が混合し再び分裂が発生する．

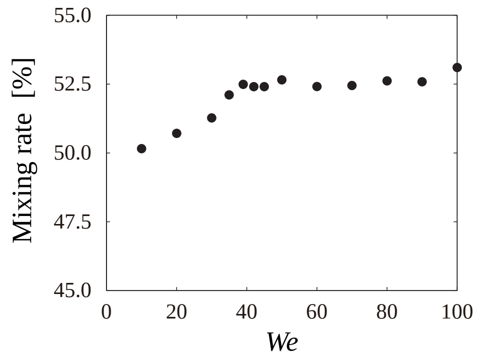

図 4　ウェーバー数と合一液滴の混合率の関係

次に，合一液滴における混合率（mixing rate）を各ウェーバー数に対して計算した結果を図 4 に示す．ここで，混合率は合一液滴における落下液滴（液滴 B）の割合を表している．本図から，$We < 40$では混合率はウェーバー数とともに増加するが，$40 < We < 100$ではほぼ一定値になっている．言い換えれば，飛沫した液滴中に含まれる A と B の割合は，$40 < We < 100$ではほぼ一定となる結果が得られた．現在，本問題の三次元解析に取り組んでいるところである．

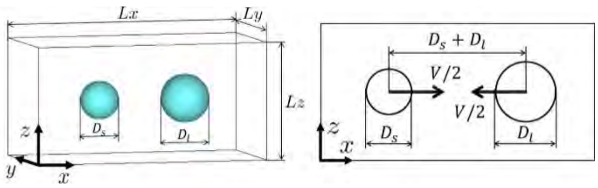

図 5　液滴衝突の計算領域および変数の定義

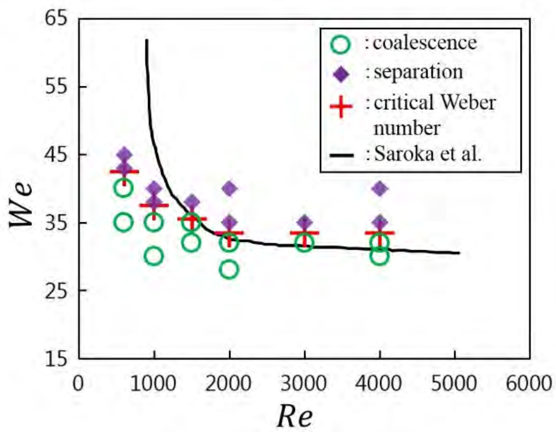

図 6　同径液滴の衝突におけるレイノルズ数と臨界ウェーバー数の関係

3.2　液滴同士の二体衝突解析

液滴同士の衝突は, 機械工学ではエンジン内の燃料噴霧, 自然界では雨滴の形成など様々な分野で見られる現象である．本研究では，種々の条件下における液滴同士の二体衝突解析を行った[12]．以下ではその結果について述べる．

図 5 に示すような$L_x \times L_y \times L_z$の計算領域内に，直径が$D_l$，$D_s$（$D_l \geq D_s$）の二つの液滴を配置し，相対速さ$V$で衝突させた．境界条件は，全面に周期境界条件を適用した．この系の支配パラメータは，液相密度ρ_Lと気相密度ρ_Gの比（ρ_L/ρ_G），液相粘度μ_Lと気相粘度μ_Gの比（μ_L/μ_G），液相基準のレイノルズ数$Re = \rho_L D_s V/\mu_L$，液相基準のウェーバー数$We = \rho_L D_s V^2/\sigma$，および 2 つの液滴の直径比$\Delta = D_s/D_l$である．以下では$0.4 \leq \Delta \leq 1.0$とし，全領域を$0.4 \leq \Delta < 0.7$ では$L_x \times L_y \times L_z = 246\Delta x \times 128\Delta x \times 128\Delta x$に，$0.7 \leq \Delta \leq 1.0$ では $L_x \times L_y \times L_z = 192\Delta x \times 96\Delta x \times 96\Delta x$にそれぞれ分割した．無次元パラメータを$\rho_L/\rho_G = 50$，$\mu_L/\mu_G = 50$，$600 \leq Re \leq 4000$，$20 \leq We \leq 80$とし，計算パラメータを$D_s = 32\Delta x$，$V = 0.1$，$\rho_L = 50$，$\rho_G = 1$，$32\Delta x \leq D_l \leq 80\Delta x$，$4.00 \times 10^{-2}\Delta x \leq \mu_L \leq 2.67 \times 10^{-1}\Delta x$，$8.00 \times 10^{-4}\Delta x \leq \mu_G \leq 5.33 \times 10^{-3}\Delta x$，$0.2\Delta x \leq \sigma \leq 0.8\Delta x$ とした．

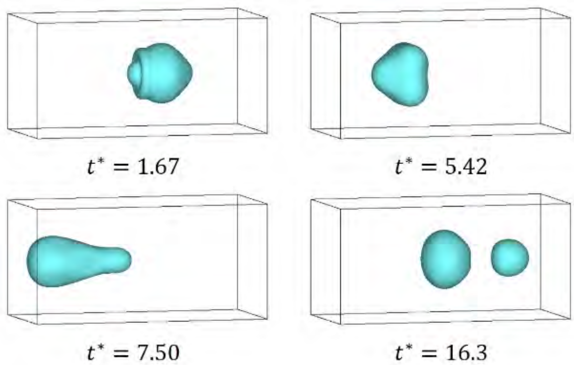

図 7　液滴衝突後における挙動の時間変化（$Re = 2000$，$We = 40$，$\Delta = 0.5$，$t^* = 2tV/(D_s + D_l)$）

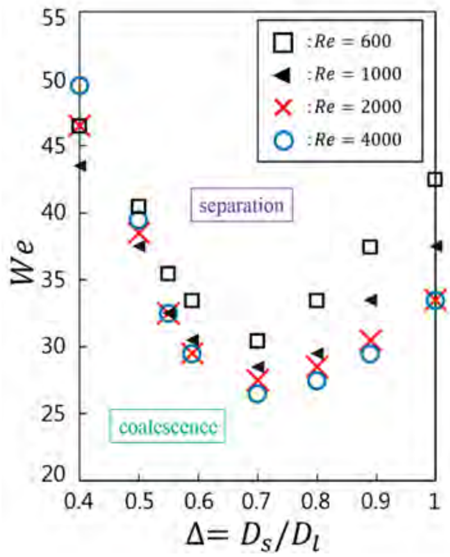

図 8　液滴の直径比と臨界ウェーバー数の関係

3.2.1　同径液滴の衝突挙動解析

同じ大きさの液滴衝突（$D_l = D_s$）において，各レイノルズ数に対してウェーバー数を変化させ計算を行った．その結果，衝突後の液滴の挙動は，同じレイノルズ数でもウェーバー数の値によって合体するケースと分離するケースが得られた．本研究では，ウェーバー数を 1 刻みで変化させ，衝突後の挙動を合体と分離の 2 つのパターンに分類し，そのとき挙動が変化する前後 2 点のウェーバー数の中間値を臨界ウェーバー数と定義した．各レイノルズ数に対する衝突挙動の形態と臨界ウェーバー数を図 6 に示す．図中の実線は挙動形態を分類する境界線であり，Volume of Fluid（VOF）法[13]に基づく数値計算から得られた Saroka らによる結果[14]である．この図より，$Re < 2000$ではレイノルズ数が小さい

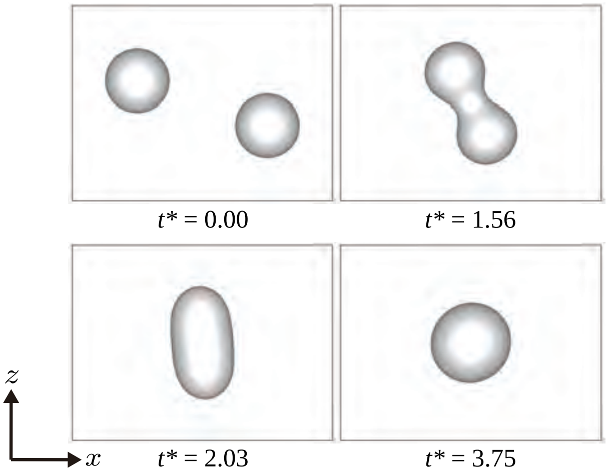

図 9　液滴挙動の時間変化（$Re = 4.97, B = 0.7$）

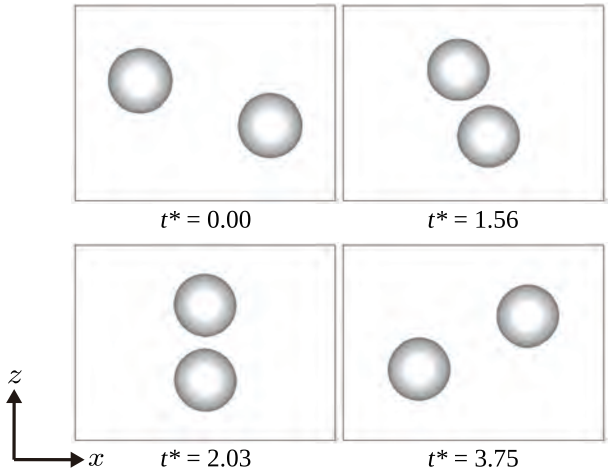

図 10　液滴挙動の時間変化（$Re = 0.994$, $B = 0.7$）

ほど合体しやすく，臨界ウェーバー数は増加していることがわかる．これはレイノルズ数の減少に伴い液相の粘度が相対的に増加するため，液滴同士が合体しやすくなったことが要因と考えられる．一方，$Re > 2000$では，臨界ウェーバー数はレイノルズ数に依存せずほぼ一定の値を示し，Saroka らによる結果[14]と良く一致している．本結果より，$Re < 2000$では，レイノルズ数は衝突挙動に影響を与え，臨界ウェーバー数を支配するパラメータであると言える．

3.2.2　異径液滴の衝突挙動解析

異なる大きさの液滴衝突において，直径比およびレイノルズ数が衝突挙動に与える影響について調べた．結果の一例として，$Re = 2000$，$We = 40$，$\Delta = 0.5$のケースに対する液滴挙動の時間変化を図 7 に示す．液滴は衝突直後に半径方向に広がって傘状になり，その後界面張力により縮み，初速方向に伸び始める．瓢箪状になった液滴はさらに伸び続け，やがては二つの液滴に分離する結果となった．

次に，$Re = 600, 1000, 2000, 4000$に対して同様の計算を行い衝突の際の挙動を調べた．各レイノルズ数に対して，液滴の直径比と臨界ウェーバー数の関係を図 8 に示す．この図より，いずれのレイノルズ数においても，直径比が$\Delta = 0.7$前後で臨界ウェーバー数は増加しており，$\Delta = 0.7$のときに最小となることがわかる．よって，$600 \leq Re \leq 4000$では，直径比に対する臨界ウェーバー数の依存性は，いずれのレイノルズ数に対しても同じであることがわかった．また，直径比が$0.55 < \Delta < 0.9$では，レイノルズ数が小さいほど臨界ウェーバー数は増加しており，この傾向は同径液滴の場合と一致している．一方，$\Delta < 0.55$では，同径液滴の傾向とは異なることから，この関係は異径特有の結果であると言える．

3.3　雲の成長過程における微小水滴の挙動解析

雲は，雲粒子と呼ばれる直径数μmから数 mm サイズの非常に小さな水滴の集まりで構成され，それらが重力や上昇気流等の影響で衝突し，合体や分裂を繰り返すことで粒径が変化し，雲の成長や消滅を促すと言われている[15]．それゆえ，雲の成長や消滅現象を解明するためには，微小水滴の衝突挙動を調べることが重要である．

以下では，雲中における微小水滴（雲粒子）の挙動を計算するために，直径が$5\mu\mathrm{m} \leq \tilde{D} \leq 50\mu\mathrm{m}$，相対衝突速さが$\tilde{V} = 0.1\mathrm{m}/s$の雲粒子を想定した衝突挙動を調べた[16]．3.2 節で述べた図 5 のような計算領域内に，直径Dの同一液滴を二個配置し，相対速さVで衝突させた．主な計算パラメータは，$L_x \times L_y \times L_z = 128\Delta x \times 64\Delta x \times 96\Delta x$，$D = 32\Delta x$，$V = 1.0 \times 10^{-4}$，$\rho_\mathrm{L}/\rho_\mathrm{G} = 5$（$\rho_\mathrm{L} = 5$，$\rho_\mathrm{G} = 1$），$\mu_\mathrm{L}/\mu_\mathrm{G} = 55$，$3.21 \times 10^{-3}\Delta x \leq \mu_\mathrm{L} \leq 3.21 \times 10^{-2}\Delta x$，$5.83 \times 10^{-5}\Delta x \leq \mu_\mathrm{G} \leq 5.83 \times 10^{-4}\Delta x$，$\sigma = 1.16 \times 10^{-6}\Delta x$とした．ここで，液相と気相の密度比について，実際には1000程度であるが，液滴のサイズが非常に小さく重力（浮力）の影響があまり大きくないと予想されるため，本研究では $\rho_\mathrm{L}/\rho_\mathrm{G} = 5$とした．ウェーバー数については，雲の場合$10^{-3}$～$10^{-2}$のオーダであるが，数値安定性の問題から$We = 1.37$とし，液滴直径および相対衝突速さ基準のレイノルズ数$Re = \rho_\mathrm{L} DV/\mu_\mathrm{L}$を$0.497 \leq Re \leq 4.97$で変化させた．また，文献[8]のモビリティの値は，$\theta_\mathrm{M} = 0.5\Delta x$とし

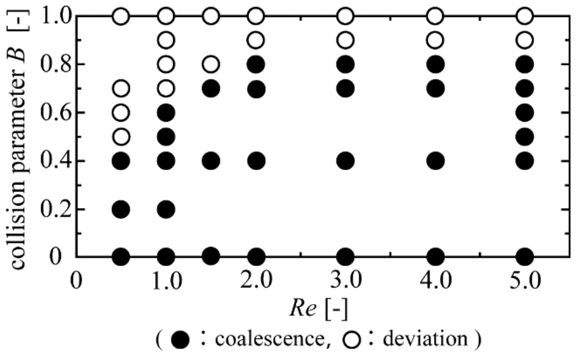

図 11　レイノルズ数と衝突パラメータに対する液滴の挙動形態

た（ただし，その値が最適かどうかについては，今後検討の必要がある）.

結果の一例として，衝突パラメータ（液滴の初期直径に対する無次元オフセット量）を$B = 0.7$とし，$Re = 4.97$，0.994（それぞれ，$\widetilde{D} = 50\mu$m，10μmに相当する）に対する液滴の挙動をそれぞれ図 9，図 10 に示す．ここで，二つの液滴には，時刻$t^* = 0$でx方向の初期速度を与えた．図 9 のケースでは二つの液滴が衝突して合体しているが，図 10 のケースでは液滴同士が接近した後，それる挙動を示し衝突は起こらない結果となった．

次に，種々のパラメータに対して同様の計算を行い，液滴挙動の違いを表したダイアグラムを図 11 に示す．液滴の挙動は 2 つのパターン（合体：coalescence，それる：deviation）に分類されることがわかる．特に$Re < 2$では，レイノルズ数が小さくなるにつれて，衝突パラメータが小さいケースでも液滴はそれる（衝突しない）ことがわかる．これは，液滴サイズがさらに小さくなり，その軌道がまわりの流れ場の影響を受けやすくなるためだと考えられる．現在，種々の条件下での計算を実行し，液滴が受ける揚力を調べるなど詳細な検討を行っているところである．

3.4　粘弾性変形する物体を含む固液二相流解析

変形を伴いながら移動する物体を含む流れの問題は，医学や工学をはじめとする多くの分野で見ることができる．例えば血液の流れは，赤血球などの固体成分が血漿とともに流れる固液二相流である．赤血球は，粘弾性をもつ膜が内部流体を覆った直径約8μmの粘弾性皮膜物体（以下では単に物体と記す）であり，柔軟に変形するため，それより小さい血管径の流路においてもスムーズに流動することができる[17]．筆者らは，これまでに，質点－ばねモデルに基づく弾性力を等密度の液液二相系 LBM[18]に組み込んだ計算手法[19]を構築した．ここでは，赤血球を模擬した双凹面形状の物体が，狭窄部を通過する際の挙動について調べた結果[20]を述べる．

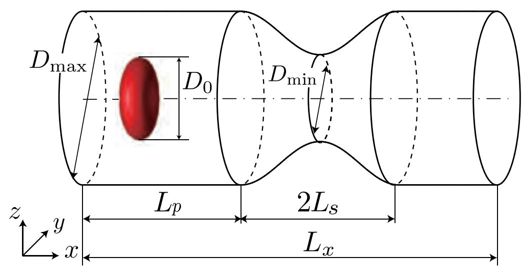

図 12　狭窄部を過ぎる物体の変形挙動解析

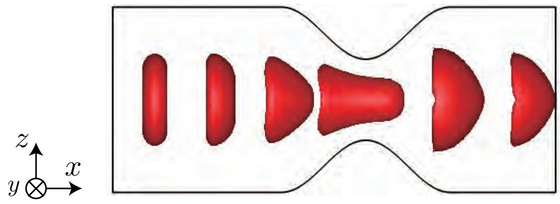

図 13　狭窄部で変形する物体の形状変化

図 12 に示すような中央部に狭窄部をもつ円管を考える．内部に配置された物体は，赤血球を模擬した双凹面形状をしており，外部から力を受けると粘弾性変形する．領域の入口と出口には，圧力差を伴う周期境界条件を適用した．また，円管の表面には，埋め込み境界法[21] に基づくすべりなし境界条件を用いた．主な計算パラメータは，$L_x = 105\Delta x$，$L_p = 40\Delta x$，$L_s = 10\Delta x$，$D_{\max} = 49.6\Delta x$，$D_{\min} = 19.2\Delta x$，$D_0 = 22\Delta x$，$\rho_{\mathrm{FA}} = \rho_{\mathrm{FB}} = 1$，$\mu_{\mathrm{FA}} = 3.93 \times 10^{-2}\Delta x$，$\mu_{\mathrm{FB}} = \mu_{\mathrm{M}} = 9.42 \times 10^{-3}\Delta x$である．ここで，$\rho_{\mathrm{FA}}$および$\rho_{\mathrm{FB}}$はそれぞれ，周囲流体および内部流体の密度，$\mu_{\mathrm{FA}}$，$\mu_{\mathrm{FB}}$，$\mu_{\mathrm{M}}$はそれぞれ，周囲流体，内部流体，および膜の粘度である．その他の値は文献[20]を参照されたい．なお，重力は考慮していない．

結果の一例として，狭窄部で変形する物体の形状変化を図 13 に示す．物体は，狭窄部を通過する際に流れ方向（x方向）に大きく変形し，上流側が凹面，下流側が凸面のパラシュート形状になっている．次に，物体の変形度およびx方向速度uの時間変化をそれぞれ図 14，図 15 に示す．ここで，物体のx, y, z方向の長さをそれぞれD_x, D_y, D_zとすると，変形度は$\Gamma = 2D_x/(D_y + D_z)$で定義した．また$U_{\max}$は，物体が存在しない場合のポアズイユ流における最

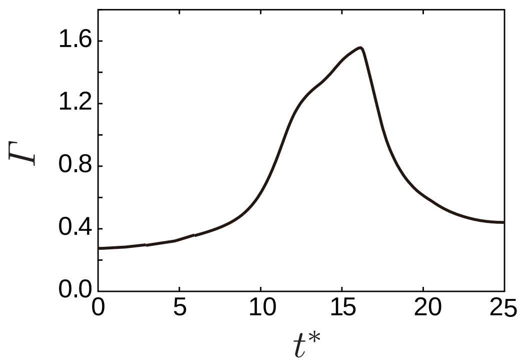

図 14　物体の変形度の時間変化

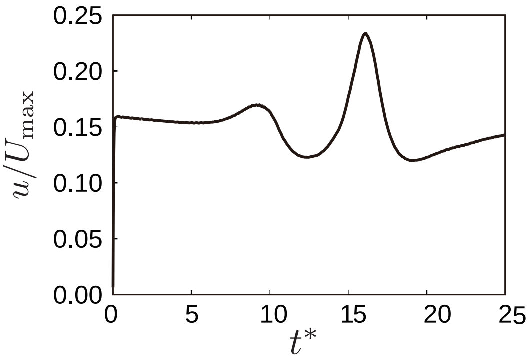

図 15　物体のx方向速度uの時間変化

大流速である．これらの図より，物体が狭窄部を通過する際の流れ方向（x方向）の長さは，両スパン方向（yおよびz方向）の平均長さの約 1.5～1.6 倍であることがわかる．また，物体は狭窄部に入るときに若干加速し，狭窄部内では減速し，狭窄部から出たときに再び大きく加速することもわかる．

今後の課題としては, 複数個の物体の挙動解析を行い, 狭窄部における物体の閉塞現象を調べることなどがあげられる．

4．おわりに

本稿では，二相系 LBM を用いた微小スケールの混相流問題の解析結果をいくつか紹介してきた. 二相系 LBM は，VOF 法[13]などの従来の混相流計算法に比べて, 各相の質量および運動量の保存性に優れており, 界面をシャープにとらえることができる効率の良い数値計算法である．特に最近では，計算機環境の目ざましい発達のおかげで，LBM を用いた大規模並列計算や GPU による高速計算（例えば文献[22]など）が行われるようになってきた．したがって，今後ますます複雑な流れ問題への LBM の適用が期待できる．

その一方で, 解決しなければいけない課題もまだ残されている．例えば，3.3 節で述べた雲の成長過程における微小水滴の挙動解析では，レイノルズ数を一定にしたまま非常に小さなウェーバー数（10^{-3}～10^{-2}）を実現するためには，界面張力をかなり大きく（現状の計算の 100～1000 倍程度大きく）する必要があり, 数値安定性の問題から計算は実行できていないのが現状である. また, 現在の二相系 LBM では, 界面において非圧縮性流体の連続の式を満たすために圧力のポアソン方程式を解く必要があり，その高速解法が課題である.

最後に，最近 Inamuro ら[23]は，高密度比の二相流に対しても圧力のポアソン方程式を解く必要のない，画期的な改良二相系 LBM を提案した．この改良二相系 LBM を用いることにより，高密度比の二相流の場合でも数値的に安定で，かつ，計算時間もかなり短縮されることが期待できる．今後は，新しい手法を用いて, 今まで計算が難しかった条件や新たな複雑流れの問題にもチャレンジしていきたいと考えている.

謝　辞

本稿で紹介した数値計算は, 信州大学大学院修了生の田中義人 君，村山寿郎 君，勝見真悟 君，深谷昇弘 君, ならびに現在在籍中の大学院生 澤田純平 君のご協力により行われました．また，本研究の一部は，JSPS 科研費 JP23560192, JP26420105, JP15H02218 の助成，ならびに学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点（jh140025, jh150012, jh160012）の支援を受けたものです．ここに記して謝意を表します.

参考文献

[1] Succi, S., *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press (2001).

[2] Inamuro, T., Lattice Boltzmann Methods for Viscous Fluid Flows and for Two-Phase Fluid Flows, Fluid Dyn. Res., **38** (2006) 641.

[3] Aidun, C. K. and Clausen, J. R., Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows, Annu. Rev. Fluid Mech., **42** (2010) 439.

[4] Gunstensen, A. K. et al., Lattice Boltzmann Model of Immiscible Fluids, Phys. Rev. A, **43** (1991) 4320.

[5] Shan, X. and Chen, H., Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases and Components, Phys. Rev. E, **47** (1993) 1815.
[6] Swift, M. R. et al., Lattice Boltzmann Simulation of Nonideal Fluids, Phys. Rev. Lett., **75** (1995) 830.
[7] Chen, L. et al., A Critical Review of the Pseudopotential Multiphase Lattice Boltzmann Model: Methods and Applications, Int. J. Heat Mass Transfer, **76** (2014) 210.
[8] Inamuro, T. et al., A Lattice Boltzmann Method for Incompressible Two-Phase Flows with Large Density Differences, J. Comput. Phys., **198** (2004) 628.
[9] Chorin, A. J., Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, Math. Comput., **22** (1968) 745.
[10] Qian, Y. H. et al., Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, Europhys. Lett., **17** (1992) 479.
[11] Tanaka, Y. et al., Numerical Simulation of Dynamic Behavior of Droplet on Solid Surface by the Two-Phase Lattice Boltzmann Method, Comput. Fluids, **40** (2011) 68.
[12] 澤田純平ら，二相系格子ボルツマン法を用いた異径液滴衝突の数値解析，混相流シンポジウム 2016 講演要旨集, D323 (2016).
[13] Hirt, C. W. and Nichols, B. D., Volume of Fluid (VOF) Methods for the Dynamics of Free Boundaries, J. Comput. Phys., **39** (1981) 201.
[14] Saroka, M. D. et al., Numerical Investigation of Heat-on Binary Drop Collisions in a Dynamically Inert Environment, J. Appl. Fluid Mech., **5** (2012) 23.
[15] 大西領，高橋桂子，雲に見られる乱流現象ー気相乱流中での微小水滴の衝突，ながれ, **30** (2011) 385.
[16] Yoshino, M. et al., Two-Phase Lattice Boltzmann Simulation of Binary Collisions of Small Water Droplets in Clouds, Abstracts of International Workshop on Cloud Turbulence, Nagoya (2015).
[17] 菅原基晃，前田信治，血液のレオロジーと血流，コロナ社 (2003).
[18] Inamuro, T. et al., Lattice Boltzmann Simulations of Drop Deformation and Breakup in Shear Flows, Int. J. Mod. Phys. B, **17** (2003) 21.
[19] Murayama, T. et al., Three-Dimensional Lattice Boltzmann Simulation of Two-Phase Flow Containing a Deformable Body with a Viscoelastic Membrane, Commun. Comput. Phys., **9** (2011) 1397.
[20] Yoshino, M. and Katsumi, S., Lattice Boltzmann Simulation of Motion of Red Blood Cell in Constricted Circular Pipe Flow, J. Fluid Sci. Tech., **9** (2014) 14-00133.
[21] Peskin, C. S., Flow Patterns around Heart Valves: A Numerical Method, J. Comput. Phys., **10** (1972) 252.
[22] Feichtinger, C. et al., Performance Modeling and Analysis of Heterogeneous Lattice Boltzmann Simulations on CPU-GPU Clusters, Parallel Comput., **46** (2015) 1.
[23] Inamuro, T. et al., An Improved Lattice Boltzmann Method for Incompressible Two-Phase Flows with Large Density Differences, Comput. Fluids, **137** (2016) 55.