氏　　名	仲尾　光平
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	甲　第１２７号
学位授与の日付	平成３１年　３月　２０日
学位授与の要件	信州大学学位規程　第５条第１項該当
学 位 論 文 題 目	On some properties of solutions to partial differential equations for an incompressible fluid (非圧縮性流体に関する偏微分方程式の解の性質について)
論 文 審 査 委 員	主査　谷内　靖　教授　　一ノ瀬　弥　教授 佐々木　格　准教授　筒井　容平　助教授 岡部　考宏　講師（大阪大学）

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では，(1) Navier-Stokes 方程式の Beale-Kato-Majda 型の解の接続定理，(2) Navier-Stokes 方程式の Serrin 型の解の接続定理，(3) 外部領域における Boussinesq 方程式の時間周期解について考察する．

(1) 水や油などの非圧縮性粘性流体の運動は，Navier-Stokes 方程式によって記述される．Navier-Stokes 方程式の解の時間大域的正則性に関する問題は，クレイ数学研究所が 20 世紀末に提唱した 7 大未解決問題のひとつである．一方で，滑らかな解の時間局所的な存在と一意性は示されているため, この解を時間に関して無限大まで延長できれば上記の問題を解決できたことになるが，現在でもそれは未解決である．

解の延長に関して，次が知られている：全空間における Navier-Stokes 方程式または理想流体の運動を記述した Euler 方程式の$[0,T)$上の解 u について，もし渦度(u の回転)の絶対値の最大値を$[0,T)$上で積分した値が有限なら，u を Tから有限時間延ばすことができる．

以下では，この定理を Beale-Kato-Majda 型の解の接続定理と言う．この定理について，「渦度の絶対値の最大値を$[0,T)$上で積分した値が有限である」という条件を弱めた条件下でも，解を有限時間延長できるかという研究がされている．例えば Fan-Jiang-Nakamura-Zhou らは，対数的に弱めた条件下で，Beale-Kato-Majda 型の解の接続定理を示した．

筆者は，彼らによる対数的に条件を弱めた Beale-Kato-Majda 型の解の接続定理を，別の方法で証明した．別証明を与えた利点は，彼らより一般のクラスの解に対して，解の接続定理を示している点と，全空間だけでなく，3 次元の半空間・有界領域・外部領域の場合にも証明方法を適用できる点である．

(2) Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について，次が知られている：n 次元 Navier-Stokes

方程式の時刻$[0,T)$上の弱解 u が条件(Se)を満たせば，u は$[0,T)$上で滑らかである．

(Se) u の L^r ノルムは，$[0,T)$上で s 乗可積分である($n<r\leqq\infty$，$2\leqq s<\infty$，$n/r+2/s\leqq 1$)．

また Navier-Stokes 方程式の時刻$[0,T)$上の滑らかな解 u が(Se)を満たせば，解を T から有限時間延ばすことができることも知られている．以下では，この定理を Serrin 型の解の接続定理と言う．

これらの定理について，(Se)を弱めた条件下でも，弱解の正則性判定条件や，解の接続定理が成り立つかという研究がされている．

筆者は，3 次元の全空間・半空間・有界領域・外部領域の場合に，L^∞空間よりも広い関数空間(具体的には $\log(e+1/|x|)$の平方根が属する空間)を用いて，$r=\infty$，$s=2$ の時の(Se)よりも弱い条件下で，Serrin 型の解の接続定理を示した．その際，Brezis-Gallouet-Wainger 型の不等式と呼ばれる log 型の不等式を用いた．

(3) 外部領域における Navier-Stokes 方程式について，Kozono-Nakao は 4 次元以上の場合に，ルベーグ空間を用いて時間周期解を構成したが，3 次元の場合は未解決であった．この原因は，外部領域におけるストークス半群の空間微分の L^p-L^q 評価に対して，強い制限が加わるためであった．

その後，Yamazaki が 3 次元の場合も含め，外部領域における Navier-Stokes 方程式の時間周期解を構成した．その際，ルベーグ空間よりも広い弱ルベーグ空間を用いて解を構成した．また解の構成のために，実補間を用いて，解の構成に必要な評価(具体的には，ストークス半群の時間に関する積分の評価)を導出した．

筆者は，Yamazaki の手法を参考にして，外部領域における Boussinesq 方程式の時間周期解を構成した．ここで Boussinesq 方程式とは，熱対流を記述した方程式で，Navier-Stokes 方程式と熱方程式の連立系である．このことから，Boussinesq 方程式は Navier-Stokes 方程式の一般化と言える．