＜論文＞

中学校数学における空間的推論能力の育成に関する研究
― パターン発見方略の有効性 ―

小口祐一　長野県北佐久農業高等学校

Developing the Spatial Reasoning Ability in Lower Secondary School Mathematics
- The Effect of 'Looking for Patterns' Strategy -

OGUCHI Yuuichi : Kitasaku High School of Agriculture, Nagano Prefecture

Problem solving, in itself a goal in learning mathematics, is also a means of developing new mathematical understanding. 'Looking for Patterns' is a strategy that has helped many students to solve mathematical problems. In this paper, I show how this strategy helps develop the spatial reasoning ability, i.e. to represent three-dimensional shapes in two dimensions and to construct three-dimensional shapes from two-dimensional representations. First, students were asked to construct some nets for regular polyhedrons. Students identified net patterns (ring, hook, U-shape) in the net of cube on the basis of symmetry. Second, they apply those patterns to a regular octahedron. I concluded that this strategy played a role in developing student's spatial reasoning ability.

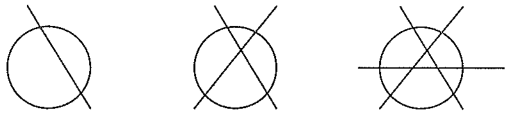
【キーワード】　空間的推論能力　パターン発見方略　　正多面体　展開図

1．　研究の背景

問題解決方略は，問題解決者が問題を理解したり，解決の計画を立てたりすることを援助する一般的な指針のことである．この問題解決方略の一つに「パターン発見方略」がある．「パターン発見方略」とは「特殊な場合から規則性を発見して，その規則性を一般の場合に適用する方略」のことである．この方略を指導することにより，生徒の問題解決能力が育成されることが，数々の研究から明らかになっている．本研究では，まず次の例を利用して「パターン発見方略」とは何かを示すことにする．

[例 1.]　パターン発見方略の例(チャールズ＆レスター,1983,p.40)

<u>1つのピザを5本の直線で切るとき，最大でいくつの部分に分けられますか？</u>



直線数	1	2	3
部分の数	2	4	7

この図と表には，直線数が 1 本から 3 本までのとき，ピザが最大でいくつの部分に分けられるかについての結果が示されている．これら特殊な場合から「部分の数の差が 2,3,4,5,…と変化する.」というパターンを発見して，そのパターンを直線数 5 本の場合における部分の数を求めるために適用することができる例である．このような「パターン発見方略」の指導の有効性についての先行研究として，たとえば石田(1998a)は，「パターン発見方略」の指導を受けた小学 6 年生に対して，その方略の使用に関して上位－下位の分析を行った．研究に利用された問題は[例 1.]で示した問題(石田はピザでなくお好み焼きとした)を含めて計 12 問である．この研究の成果として，次のことがあげられている．図形の規則性発見問題の解決過程において，

① 学力上位群は，「パターン発見方略」の実行手続きをルーチン化していた．

② 学力下位群では「素朴な解決方法」を見直して「効率的な解法」を工夫する中で，図の構造に着目してパターンを発見し，それを解決に利用する子どもが見られた．

また，曜日ごとに洋服を着替えるという身近な場面を用いて「パターン発見方略」の指導を受けた児童が，数の系列の規則性を説明する場面で「パターン発見方略」を適用し，問題解決に生かした報告もされている(上野,1986)．この「パターン発見方略」は，明示的に指導しなければ生徒にとって獲得することが困難であり，この方略を発見的に指導することにより，以後の問題解決に有効に働くといわれている(石田,1998b)．

このように「パターン発見方略」は，発見的に指導すると生徒の問題解決能力の育成に効果があると考えられる．特に，図形の規則性発見問題に有効であるといわれている(石田,1998a)ことから，本研究ではこれらの成果をふまえて，生徒の問題解決能力の育成だけでなく，図形領域で大切な空間的推論能力を育成するためにも「パターン発見方略」の指導は有効ではないかと考え，実験授業を通して考察していくことにした．ここで取り上げた「空間的推論能力」とは「3 次元の図形を 2 次元で表現することと，2 次元の表現から 3 次元の図形を構成することにより，3 次元の図形の特徴を知る能力」(NCTM,2000,p.169)のことである．

２．研究の目的

本研究の目的は「生徒の空間的推論能力(Spatial Reasoning Ability)を育成するために，パターン発見方略(‘Looking for Patterns’ Strategy)の指導は有効か.」という課題に答えることである．

3．研究の方法

3.1　教材研究

中学校 1 学年における「空間図形」の単元では，「直観的な理解を助け，論理的な考察の基礎を培うために，例えば，立体の模型をつくりながら考えたり，目的に応じてその一部を平面に表す工夫をしたりするなど，観察，操作や実験などを通して図形を考察することを基本にして学習を進めていく.」(文部科学省,1999,p.81)ことが述べられている. その際，基本的な図形を対称性の観点からとらえることは，論理的な考察の基礎を培う役割を果たす(文部科学省,1999).

そこで本研究では，正多面体がもつ様々な対称性に着目して，展開図の発見と正当化に必要な，展開図の性質について考察する．ここでいう正当化とは，行為や意見が正しいことを理由づけることである．それをふまえて，展開図による正多面体の学習活動の中に，「パターン発見方略」の指導を取り入れた問題を作成するための観点を特定する．

3.2　事例研究

上述した観点に基づいて作成した問題を用いて，「生徒の空間的推論能力を育成するために, パターン発見方略の指導は有効か.」という課題に答えるために実験授業を実施する. この授業では，生徒に正六面体の展開図からパターンを発見させ，そのパターンを適用して正八面体の展開図をかく問題場面を設定する．そして，それぞれの展開図を正当化する議論の際に，生徒はどのような理由づけをしたかについて調べ，それに基づいて「パターン発見方略」と「空間的推論能力」の関連性について考察することにする．

4．「空間図形」の教材についての研究

ここでは正多面体の性質を調べ，それをふまえて「パターン発見方略」の指導を取り入れた問題を作成するための観点を特定する．まず(1)において，正多面体の定義を示した. (2)において，2 次元の表現から 3 次元の正多面体を構成するために必要な，展開図の性質について調べた．この性質は，多様な展開図を発見し，それぞれの展開図から正多面体を構成できることを正当化するための根拠となり得る．(3)において，展開図による正多面体の学習に「パターン発見方略」の指導を取り入れた問題を作成する観点について述べた.

(1) 正多面体の定義とその種類

正多面体とは，次の 3 つの必要条件を満たす図形である(一松,1983).

① 有限個の面で囲まれた凸多面体である.

② 各面はすべて合同な正多角形である.

③ 各頂点はすべて合同な正多角錘である．正多角錐とは「正多角形の中心を通る面に垂直な直線上の点から，正多角形を射影してできる角錐」のことである.

これらの必要条件を満たす図形が 5 種類存在して，その 5 種類ですべてであることは，すでに証明されている(中村ほか,1971). また，必要条件を「すべての面が同じ正多角形であり，すべての頂点に集まる面の数も同じである凸多面体」としても，正多面体は[図 1.]

の 5 種類であることはオイラーの公式を利用して証明されている(一松,1983).

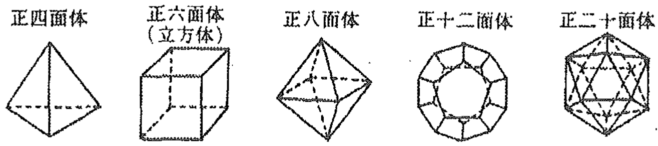


図1　5種の正多面体

(2) 展開図の性質

生徒に正六面体の展開図をつくる問題場面を与えて，その追究プロセスを振り返らせる段階において，多様な正六面体の展開図を分類し，そこからパターンを特定させるとき，次のようなパターンが生徒によって発見されるだろうと予想した.

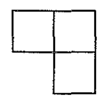
[正六面体の展開図のパターン]

ア．輪をつくり、蓋をするパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 6 種類について正当性が確認できる.

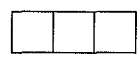
イ．かぎ型に分けるパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 6 種類について正当性が確認できる.



ウ．折るとコの字型になるパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 4 種類について正当性が確認できる.



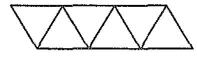
これら 3 つのパターンを根拠に議論すると, 正六面体の展開図である全 11 種類について正当化することができる.

[正八面体の展開図のパターン]

正六面体の展開図から，アからウまでの 3 つのパターンを発見した生徒は，正八面体の展開図をつくる問題場面において，それらのパターンを次のように適用することができるだろうと予想した.

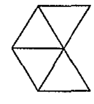
ア．輪をつくり、蓋をするパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 6 種類について正当性が確認できる.



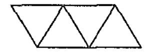
イ．かぎ型に分けるパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 6 種類について正当性が確認できる.



ウ．折るとコの字型になるパターン

このパターンを根拠にして, 全 11 種類の展開図のうち 6 種類について正当性が確認できる.



これら 3 つのパターンを根拠に議論すると，正八面体の展開図である全 11 種類について正当化することができる．

正六面体の展開図による学習の際に，パターン発見方略を指導することにより「生徒は，上述した 3 つのパターンに着目して念頭操作および手を動かして操作する活動を通して，正八面体の多様な展開図を発見し，正当化の議論の際に根拠を示して空間的推論をすすめ，正八面体を構成できるかどうかを判断できるようになる．」という可能性があると考えた．

(3) 「パターン発見方略」の指導を取り入れた問題作成の観点

ある教科書には「正四角錐の展開図をかきなさい」という問題や，正四面体の展開図を提示して「この展開図から，どのような立体ができるかつくってみましょう」という問題が取り上げられている(福森ほか,1999)．このような問題から，多様な展開図を発見していく活動や発見した展開図がもとの立体の展開図として適切かについて確かめる活動を通して，論理的な考え方や対応の考え方を育てることができる(奥野,1986)．本研究は，多様な展開図を発見し，それらのパターンを特定して，そのパターンを他の立体の展開図発見問題に適用する過程における生徒の活動を通して，生徒の空間的推論能力を考察することをねらっている．そのため，展開図の総数や予想されるパターンが類似している立体を利用した問題が実験授業に適していると考えられる．正六面体の展開図と正八面体の展開図の総数はともに 11 個であり，さらに前述したように予想される展開図のパターンも類似しているので，これら 2 つの正多面体の展開図についての問題を作成することにする．

5．事例研究

5.1　実態調査

実験授業に協力してくれる生徒は，立体の展開図をかく素地がどのくらいあるのだろうか．そのことを確かめるために，次のような実態調査を実施した．

[調査問題]　（正四面体の模型を提示して）この立体の展開図をかこう．

協力生徒 38 名中，それぞれの図をかいた生徒数は次のようになった．

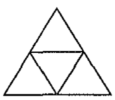
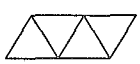
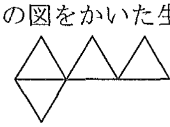
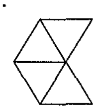





図 a.　31 名　図 b.　11 名　図 c.（上図等頂点でつながる図）10 名　図 d.　1 名

図 a をかいた生徒のうち，11 名が図 b，10 名が図 c 等頂点でつながる図，1 名が図 d をかき，全く図をかけなかった生徒が 7 名いた．すべての生徒に，図 c 等頂点でつながる図を展開図には含めないことにすることを指導した．また，生徒に図 d から正四面体を構成できるか尋ねたところ，全員ができそうだと答えたため，実際につくって確かめる活動を入れて，正四面体の構成可能性について確認した．この実態から，正しい立体の展開図をかく素地としては，組み立てやすいものについてかける生徒は多いが，組み立てがやや複雑なものについては，かける生徒が少ないといえる．また，協力生徒の多くは展開図をかく素地があるが，それを正当化するために必要な論理的な考え方が不十分であり，根拠と

なり得るパターンや数学的概念を学習していく必要があると考えられる.

5.2 実験の目的

そこで，多様な正六面体の展開図をかき，それらの展開図をもとに「パターン発見方略」の指導を行った後，そのパターンを適用して正八面体の展開図をかき，それぞれの展開図を正当化する議論を行う実験授業を構想した．その授業において，生徒が根拠を持って展開図を発見し，空間的推論を用いて議論できるようになったかどうかについて調べ，それに基づいて「パターン発見方略」の指導の有効性についての考察を行った．

5.3 実験の方法

(1) 実験の対象

長野県内公立中学校 1 年 S 組 (男子 20 名，女子 18 名，計 38 名)

(2) 課題

[課題 1.] 正六面体の展開図をかこう．正しく正六面体を構成できる展開図はどれだろう．

[課題 2.] 正八面体の展開図をかこう．正しく正八面体を構成できる展開図はどれだろう．

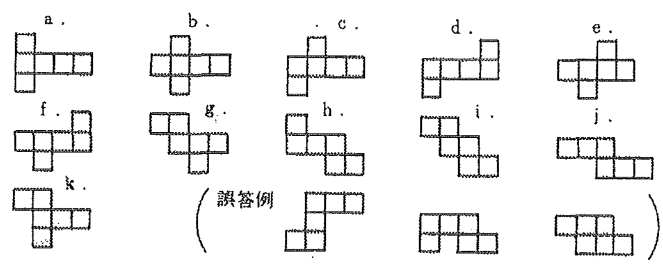
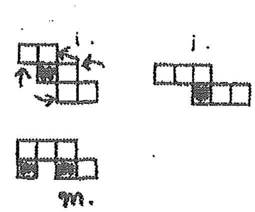
(3) 実験の手続き

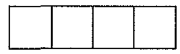
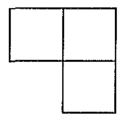
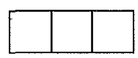
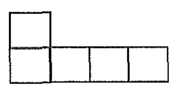
第 1 時において，生徒は多様な正六面体の展開図をかき，それらの展開図を類似点に基づいて分類し，展開図のパターンとして特定した．

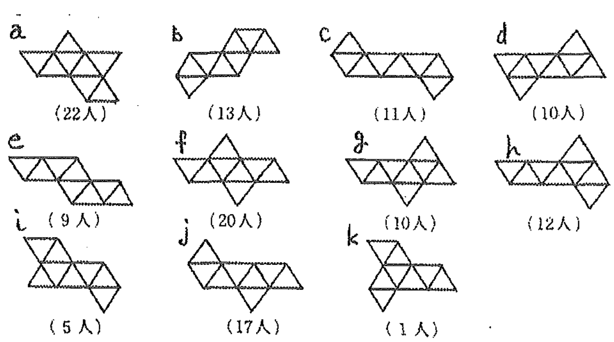
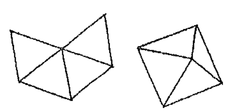
第 2 時において，生徒は多様な正八面体の展開図をかき，それぞれの展開図をかいた生徒数を整理した．

第 3 時において，それぞれの展開図を正当化する議論を行った．そこでの議論における生徒のプロトコルを記録し，生徒はどのような理由づけをしたかについて調査した．

5.4 実験授業

[第 1 時] 正六面体の 展開図をかく	T1: 正六面体の展開図をかいてみよう．(正六面体の模型を提示する．) S1: (試行錯誤しながら展開図をかく．)  L m n
正当化	T2: 正しく正六面体を作成できる展開図はどれだろう．a～n の展開図から正六面体ができればグー，できなければチョキ，わからなければパーをあげてください． (意見がわかれた展開図 h，i，j，m)  T3: m はどうですか． S2: ここところ(右図 m 黒塗の面)が重なっ

	てしまうからだめです. S3: jはここ(上図j黒塗の面)を底にして，折りこんでいくとできます. S4: iはここ(上図i黒塗の面)を底にして，この4つが側面(上図i矢印の面)でこれが上になってできます. S5: hはわからないけど，作ってみればいいよ. T4: それでは，必ず1つは作って確かめよう.（生徒が実際に作った後，正六面体が構成できる展開図がどれかについて確認した.）
パターン発見方略の指導	T5: a～kの展開図から，正六面体ができることを確認できたね. それではa~kの展開図をみて，似ているものなどを仲間わけしよう. S6: a～fで分けました. これは中心に正方形が4つあって，残りが上と下に分かれています. S7: 4つあるのは同じで，残りの2つは見る人によっては横についています.  T6: 横がひとつながりの輪になって，上下にふたがくっつくのですね. S8: iとjは2段と3段だけど階段状になっている.  S9: d～iはL字が2つずつできている. T7: L字を折るとどんな形になりますか. S10: （折ってみる） T8: （折ったものを見せて）この形が2つくっついているのですね. S11: 底を決めると組み立て方が同じで，最後にふたが付きます. S12: g,h,kは，正方形が2個，3個，1個の組み合わせで並んでいます. S13: aとjは，正方形が3個ずつに分けられます. T9: ここまで出た見方をまとめると，4個の輪・L字・階段状・3個の形ですね. 3個の形は何と言えばいいかな.  S14: 折るとコの字になるから，コの字.
[第2時] パターンを振り返る	T10: 今日は正八面体の展開図をかいてみよう.（正八面体の模型を提示する.）その前にまず，正六面体の展開図のパターンを振り返ろう. この展開図では，もう1枚をどこへ付けたらいいかな. S15: 下のどこかへ付ければいいです.  T11: この展開図にはどんなきまりがあっただろう. S16: 4つ並んで輪の形になっているのです. T12: 他に，どんなきまりがあったかな. S17: L字形もありました. S18: コの字型になるのも…. T13: そうだったね. では，正八面体の展開図を考えるときも正六面体の展開図の考え方が使えないだろうか. S19: 輪の形って使えそうです. L字形って正八面体ではどうなるの. T14: どうなるかな. 今の意見も参考にして正八面体の展開図を描いてみよう.
正八面体の展開図をかく	（パターンを適用しながら展開図をかく.）

	
[第 3 時] 正当化	T15: どれが，正しく正八面体をつくる展開図だと思いますか． S20: c は，真ん中で輪になって，上と下に一つずつ三角形があるから，できると思います． S21: そうすると，d や f,g,h,j も同じ理由で，できると思います． T16: c は真ん中で輪ができると言ったけど，つくるとどんな形ができるのかな． S22: それだとねじれてきて，こうなって….（手を動かして操作をはじめる.） S23: 鍋とふたで考えたほうがわかりやすい． T17: どうするの． S24: 4 枚で鍋をつくって，4 枚でふたをつくるの． S25: そうすれば a,b,i,j はうまくいく．（多くの生徒が納得いかない様子.） T18: もう少し説明を加えてくれるかな． S26: （立体模型を使って）上から先に開いて，次に下を開きます． S27: （展開図を使って）この形を 2 枚つなぎ合わせるとできます．  T19: K 君(S26)は立体で，H 君(S27)は展開図で説明してくれたね．それでは，自分の考えをプリントに書いてみよう．
振り返る	T20: それでは，自分の考えを発表してもらいましょう． S28: 正八面体の展開図は最初どうやればよいかわからなかったけど，L 字型を 2 つつなげるやり方（鍋とふた）がわかると簡単にできました． S29: できそうもないと思っていた d を確かめてみたらできたので，やったと思った．ひとつながりの輪があることがわかった．

5.5 考察

実験授業における生徒の活動を通して「生徒の空間的推論能力を育成するために，パターン発見方略の指導が有効であったか.」について考察する.上述した生徒のプロトコルは，議論の推移を時間の変化に対応させて考察するために，全時間の通し番号とした．

実態調査では，38 名中 31 名の生徒が正四面体の展開図をかくことができた．このことから，多くの生徒にとって展開図をかく活動は可能であり，全く展開図をかけなかった 7

名の生徒に対しては，組み立てやすい展開図をかき，実際に正四面体を組み立てる活動をさせて，展開図をかくための素地指導を行った．

このような実態の生徒に対して，第 1 時の「正六面体の展開図をかく」段階では，苦労してかいていた生徒もいたが，すべての生徒が少なくとも 1 つは正しい展開図をかくことができ，特殊なもの(正方形を半分に切ったもの)を除いて，クラス全体で 14 個の図をかくことができた．

「正当化」の段階では，正六面体の底になる正方形を決めて，底以外の面を特定するために，念頭操作や手で操作しながら説明する姿がみられた(S3,S4)．しかし h のように操作が難しい図になると，すぐに作って確かめようとする意見にまとまり(S5)，論理的に正当化する議論をさせるためには，根拠となるパターンを発見させる指導が必要であった．

そこで「パターン発見方略の指導」段階では，展開図からパターンを発見する活動を行った．生徒は，筆者が予想した 3 つのパターン(輪，かぎ型＝L 字型，コの字型)についてはすべて発見し(S6,S9,S14)，それ以外に階段状(S8)や 2 個・3 個・1 個の組み合わせ(S12)といったパターンも発見していった．このことから，生徒が発見するパターンの多様性にあらためて驚くと同時に，これらのパターンの有効性に気づくような指導をする必要があると考え，次時以降に生かすように授業計画を立てた．

第 2 時の「正八面体の展開図をかく」段階では，正六面体の展開図から発見したパターンを振り返り，正八面体の展開図に適用しやすいと考えた 3 つのパターンに焦点をあてた上で，問題に取り組むように指導した(T10～T14)．生徒は 11 個の正しい正八面体の展開図を作図し，それぞれの展開図をかいた生徒数は 1 名～22 名の範囲であった．正六面体の展開図をかく問題では，輪のパターンを使って説明することが多かったが，正八面体の展開図をかく問題で一番多くの生徒がかいた展開図は a（L 字型のパターンのみ適用可能）の 22 名であった．また f，j（輪と L 字型のパターンが適用可能）をかいた生徒数は，d，g，h（輪のパターンのみ適用可能）をかいた生徒数の約 2 倍であった．このことから，生徒が使ったパターンとして L 字型のパターンが多かったのではないかと予想できる．

この予想を裏付ける議論が，第 3 時の「正当化」の段階でみられた．正当化の議論の中で，c の展開図に輪のパターンを適用した発言(S20)があった．輪のパターンを立体と関連づけるべく，手で操作を行ってみた(S22)が，途中で行き詰まった．その様子をみて，L 字型のパターンを用いて 3 次元の立体から 2 次元の展開図を説明しようとする発言(S23, S24, S26)があり，逆にこのパターンを用いて 2 次元の展開図から 3 次元の立体を説明しようとする発言(S27)が続いて，多くの生徒は「展開図で L 字型のパターンを，正八面体の上半分の形に対応させること」で納得した様子であった．このように「パターン発見方略」の指導は，展開図のパターンを発見することだけで効果がでるのではなく，それらのパターンを立体と結びつけて議論していたとき，より有効に働いていたことを，生徒の活動から読みとることができる．すなわち空間的推論能力(「3 次元の図形を 2 次元で表現することと，2 次元の表現から 3 次元の図形を構成することにより，3 次元の図形の特徴を知る能力」)

は，3次元の立体と2次元の展開図を関連づけていく活動から育成されると考えられる．

「振り返る」段階では，L字型のパターン（立体では鍋とふたの考え方）の有効性に気づいた生徒(S28)や，輪のパターンは操作として納得できなかったが，実際に作ってみて正八面体に適用可能であることに気づいた生徒(S29)などがみられた．このように「パターン発見方略」の指導は，「獲得したパターンを類似の問題に適用することができるか．」という自らの問いを持ち，立体と展開図を関連づけて考え，それに基づいてパターンの適用可能性を確認できた生徒にとって有効であったといえる．

6．研究の結論と残された課題

本研究の目的は「生徒の空間的推論能力(Spatial Reasoning Ability)を育成するために，パターン発見方略(‘Looking for Patterns’ Strategy)の指導は有効か．」という課題に答えることであった．実験授業では，展開図のパターンを発見的に指導することにより，生徒はそのパターンを根拠として，展開図と立体を関連づけて空間的推論を行うようになった．その推論が，展開図を正当化する議論において効果的に働いていたといえる．すなわち結論として，「空間的推論能力を育成するために，パターン発見方略の指導は有効であった．」ということがわかった．

残された課題として，「生徒の空間的推論能力を育成する」という目標に向けて，各学年段階で指導する内容を系統化したいと考えている．

文献

チャールズ,R＆レスター,F(1983)．算数の問題解決の指導．東京：金子書房．

一松信(1983)．正多面体を解く．東京：東海大学出版会．

福森信夫ほか(1999)．新訂数学1年．東京：啓林館．

石田淳一(1998a)．長期間の問題解決方略の指導を受けた小学6年生の問題解決方略の使用に関する上位－下位分析．日本数学教育学会誌数学教育学論究，第80巻，pp.3-20．

石田淳一(1998b)．長期間の問題解決方略の指導効果に関する研究．筑波数学教育研究，第17号，pp.63-68．

文部科学省(1999)．中学校学習指導要領解説数学編．大阪：大阪書籍．

中村幸四郎,伊東俊太郎,寺坂英孝,池田美恵(1971)．ユークリッド原論．東京：共立出版．

NCTM(2000)．Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.（邦訳：筑波大学数学教育学研究室(2001)．新世紀をひらく学校数学．茨城：筑波大学数学教育研究室．）

奥野英男(1984)．操作的な活動を生かした展開図の指導について．日本数学教育学会誌算数教育，第66巻，pp.8-12．

上野正幸(1986)．ストラテジー獲得による問題解決力の育成．日本数学教育学会誌算数教育，第68巻，pp.32-36．

(2002年3月31日　受付)

(2002年7月1日　受理)