

<実践報告>

曲線・曲面論の講義における動的数学ソフトウェア GeoGebra の活用

昆 万佑子 信州大学学術研究院教育学系

Use of Dynamic Geometry Software in Teaching Curve and Surface Theory in University Mathematic Classes

KON Mayuko: Institute of Education, Shinshu University

研究の目的	<p>学部選択科目「曲面上の幾何学」において、ICTを活用した学部学生の理解向上に取り組み、大学の幾何学の講義への動的数学ソフトウェアの効果的な導入方法を検討する。</p> <p>学部学生の教育現場での幾何学に関する教材作成の実践を支援する。</p>
キーワード	幾何学教育 動的数学ソフトウェア ICT活用
実践の目的	ICTを用いた幾何学講義の改善を目的とした
実践者名	昆 万佑子
対象者	信州大学教育学部学校教育教員養成課程数学教育コース3・4年生(27名)
実践期間	2019年7月
実践研究の方法と経過	「曲面上の幾何学」において、曲線・曲面の具体例の表示等について、受講者のパソコン・タブレット・スマートフォンで動的数学ソフトウェア GeoGebra を用いた演習を行った。また、自主学習教材として、空間曲線の動標構、曲率、捩率を表示する教材を提供した。
実践から得られた知見・提言	<p>ICTを活用した授業実践の結果、GeoGebraを用いた具体例や曲率、捩率、動標構等の各種幾何学的量の視覚化は、受講者の理解向上に有用であると判断できる。特に、パラメーターの変化による幾何学的量の変化の観察に際し、有効に機能すると思われる。</p> <p>より適切な活用方法を検討し、講義に積極的に導入し、受講者がソフトウェアの扱いに習熟することによって、大学での講義内容の理解向上のみならず、実習授業での教材作成等に幅広く活用してゆくことが期待される。</p>

1. GeoGebra

GeoGebra は、幾何、代数、表計算、グラフ、統計、解析をひとつのパッケージにした動的数学ソフトウェアである。GeoGebra はリンツ大学の Markus Hohenwarter (当時はフロリダ大西洋大学に在籍) によって始められた数学ソフトウェアプロジェクトであり、小学校・中学校・高等学校等教育のすべての段階で、主に数学の授業を補助するオープンソースソフトウェアとして提供されており、STEM (科学: Science, 技術: Technology, 工学: Engineering, 数学: Mathematics) 教育や学習・指導の革新を世界中で支援している。

インストール版として各種 OS 向けアプリが App Store, Google Play, Microsoft Store から無料でダウンロード可能であり、さらに、機能別専用 Web アプリ (関数グラフ, 空間図形, 数式処理 CAS, 科学計算電卓) がブラウザ上で使用できる。また、タブレット・スマートフォンに対応した機能別専用アプリが無料でダウンロード可能である。

GeoGebra はその機能性から、Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany), Microsoft Partner of the Year Award 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA), MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA), NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C., USA), Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA), BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award 等、多数の賞を受賞している (GeoGebra 公式サイトより)。

GeoGebra は図形の描画のみならず、数式入力によるグラフ表示、数式処理システム、スライダー機能を使用したパラメーター表示の視覚化、スクリプト等多彩な機能を持ち合わせている。

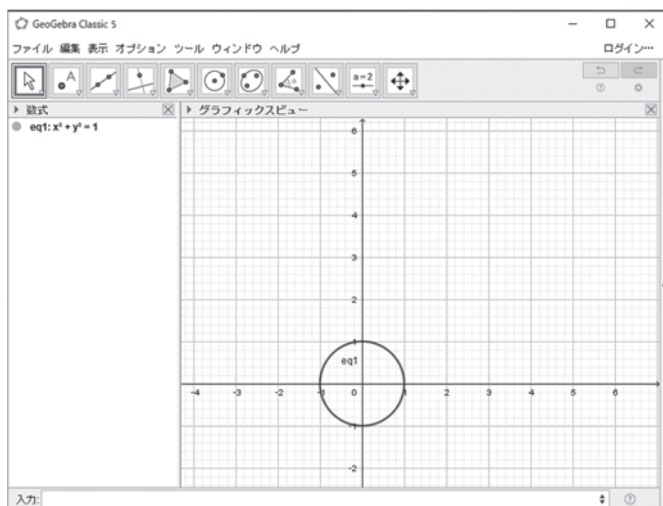


図 1 Geogebra 操作画面

作図ツールとして使用する際の操作は、直感的でわかりやすい。図のツールバーの中から点や線、円が描かれたアイコンを選択して、図形を表示するグラフィックスビュー上をクリックすることによって、図形を描画することができる。

例えば原点中心半径 1 の円を描くときは、円が描かれたアイコンをクリックし、「中心と半径で決まる円」のアイコン

ンを選び、グラフィックスビュー上の原点をクリックし、半径 1 を指定すればよい。

指定した点を中心とする円、2 点を結ぶ線分、二直線の交点の作図、多角形、角、接線等様々なツールが使用可能であり、特に義務教育段階の算数・数学で取り扱う主な作図操作は、そのほとんどが実装されているとあってよい。図 1 では平面図形を描写したが、空間図形を描画する空間図形モードもある。

また、数式入力による描画も可能である。原点中心半径 1 の円を表す式は $x^2 + y^2 = 1$ であり、入力バーに「 $x^2+y^2=1$ 」を入力することによっても描画できる。GeoGebra にはベクトル、複素数、陽関数、陰関数、真偽値、リスト、行列、一変数の微分、多変数の微分等豊富な機能が実装されており、入力内容を組み合わせることによって複雑な計算を実行できる。

スライダーと呼ばれる機能も搭載されている。数値、角度、または、整数を選び、対応するスライダーを作成し、「移動」ツールでスライダーのつまみを動かすとその値が変化するので、作図にその値を使用すると動的に図形を変化させることができる。スライダー機能の活用により、「パラメーターの値が変わればそれにつれて変化する量」を目で見て観察することが出来るようになる。例えば、半径の値を変えればそれに従って円が拡大・縮小する様子など、図形の動的な変化を観察することができる。図形の動的な変化を黒板で説明することは困難さを伴うが、動的数学ソフトウェアの活用によって、より分かりやすい説明が可能となる。

GeoGebra は多言語で利用可能であり、世界中の使用者からなる大きなコミュニティで作図の作例が多数閲覧出来るという特徴がある。コミュニティには、教育の各段階における豊富な教材の実例が投稿されており、世界中で活用されている。日本の大学教育においては、例えばテイラー多項式 (濱田 2011) 等の実践や双曲幾何学の作図 (阿原 2016) が報告されており、示野 (2009) による指数関数・正弦関数のテイラー展開の教材が Web ページで公開されている。なお、現在 Web ページ上の GeoGebra の教材は、環境によってはブラウザ上に表示されないことがある。

本稿では、信州大学教育学部 2019 年度前期選択科目「曲面上の幾何学」における、GeoGebra の活用実践を報告したい。

「曲面上の幾何学」は三年次以降に履修する選択科目であり、受講者は二年次の幾何学基礎、代数学基礎、解析学基礎、ユークリッド空間内の幾何学等の必修科目において、集合や写像の概念、線形代数学、微分積分等、基礎的な内容を履修済みである。講義内容は古典的な曲線・曲面論であり、平面上の曲線、空間内の曲線・曲面に対する微分幾何学的な解析手法を修得することが目標である。曲線・曲面論は多くの大学で取り扱う微分幾何学の入門的な科目として位置づけられ、現代的な幾何学の理解に必須な概念である多様体論の基礎となる内容を多く含む。多様体論では多くの具体例が黒板には図示できない一般次元の対象であるため、視覚的な理解に留まらない抽象的な思考力を培うことが必要となるが、導入としての曲線・曲面論の段階で着実なイメージを培う手段として、動的幾何学

ソフトの活用は有用であると考える。

「曲面上の幾何学」では、曲線・曲面の豊富な実例を取り扱う。教科書に掲載されている図は具体例のイメージを培う助けとなるが、動的数学ソフトウェアを使用し、受講者のパソコンやタブレット、スマートフォン上に対象となる図形を実際に描画することによって、受講者は図形を画面内で自由に回転させたり、見る角度を変えたり、あるいは講義で取り扱う微分幾何学的量（曲率等）の計算を行うなど、具体例に対する理解を深めることが出来る。

2. 講義における活用

2019 年度前期選択科目「曲面上の幾何学」の最終回において、GeoGebra を用いた演習を行った。受講者は教室に自分のノートパソコンやタブレットを持参するか、スマートフォンを用いて GeoGebra を操作する。Windows, iOS のパソコンではフリーソフトのダウンロード版が開発されており、Web ブラウザ上でも操作可能である。iOS, Android のスマートフォンやタブレットにアプリをダウンロードして使用することもできる。

講義では以下の課題を演習形式で実施した。

1. 平面曲線と空間曲線の例を表示する。
2. 平面曲線の曲率ベクトルと曲率を表示する。
3. 曲面を表示する。
4. xz 平面上の平面曲線を、 z 軸の周りに一回転してできる曲面を表示する

解決のために必要となる操作を紹介し、受講者が実際に自分のパソコンやタブレット、スマートフォンで GeoGebra を操作して課題を解決する。

まず、課題 1 では次のような指示を行った。

「平面曲線を表示するコマンドは $\text{Curve}(\langle \text{式} \rangle, \langle \text{式} \rangle, \langle \text{媒介変数} \rangle, \langle \text{開始値} \rangle, \langle \text{終了値} \rangle)$ 。例えば $c = \text{Curve}[\cos(t), \sin(t), t, 0, 2\pi]$ を入力すれば、曲線 $c = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ が表示される。空間曲線を表示するコマンドは、空間図形モードを使って $\text{Curve}(\langle \text{式} \rangle, \langle \text{式} \rangle, \langle \text{式} \rangle, \langle \text{媒介変数} \rangle, \langle \text{開始値} \rangle, \langle \text{終了値} \rangle)$ 。たとえば $c = \text{Curve}[\cos(t), \sin(t), t, t, 0, 2\pi]$ を入力すれば、曲線 $c = (\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$ が表示される。教科書の平面曲線と空間曲線の例をいくつか自分で描いてみよう」

ここで、媒介変数はパラメーターと同じ意味である。指示されたコマンドをそのまま入力すれば、平面上の原点中心半径 1 の円と、空間内の常螺旋が表示される。入力できた受講者には、今度は曲線のパラメーター表示の成分を他の関数に変えて、別の具体例を表示してみるよう指示した。

また、課題 2 は曲率と曲率ベクトルのコマンドを用いて解決される。講義では下記の指示を行った。

「まずは平面曲線を描き、曲線の上に点を取る。 $\text{Curvature}(\langle \text{点} \rangle, \langle \text{オブジェクト} \rangle)$ で曲率、 $\text{CurvatureVector}(\langle \text{点} \rangle, \langle \text{オブジェクト} \rangle)$ で曲率ベクトルを表示できる。課題 1 で描

いた平面曲線上に点を取って、曲率と曲率ベクトルを表示してみよう。また、点を動かして曲率と曲率ベクトルの変化を観察しよう」

曲率及び曲率ベクトルは、パラメーターが変化すればそれによって変化する量及びベクトルであり、曲線上の点を動かすことにより、曲率の値と曲率ベクトルがどのように変化するかを観察できる。また、平面曲線の曲がり方と曲率の値との関係（曲率の絶対値は、曲線が急激に曲がっている個所では大きくなり、緩やかに曲がっている個所では小さくなること）を視覚的に理解できる。

なお、具体例として課題 1 のサンプルの円を使用した受講者も多かったが、円周上では曲率がどの点でも一定の値となるため、変化の様子が観察しづらい。次年度以降の課題としたい。

課題 3 では、以下の指示を行った。

「Surface(<式>, <式>, <式>, <媒介変数 1>, <開始値>, <終了値>, <媒介変数 2>, <開始値>, <終了値>)を用いれば、空間図形として曲面を表示することができる。教科書 3 章の具体例を表示してみよう」

曲面の具体例は多くの教科書に図が描かれているが、GeoGebra を用いた表示では様々な角度・視点から曲面の様子を観察することによって、より直感的・感覚的な理解が可能となる。講義では、課題 1 を解決した段階で曲面を描くコマンドを自分で調べ、課題 3 の提示前に曲面を表示させている受講者も見られた。

課題 4 では、以下の指示を与えた。

「二通りのやり方が考えられる。まずは、 xz 平面上の曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ を z 軸の周りに一回転したらどのような式になるか、パラメーター表示を考える方法。教科書 3 章の章末問題の具体例のうち、回転面の式の形を観察してみよう。『直線のまわりに回転』の機能を使うやり方もある」

回転面は、小学校・中学校・高等学校の算数・数学の様々な場面で取り扱う対象である。例えば立体図形の学習の際、円錐や円柱は、ある直線の周りに線分を回転させて得られる図形である。また、回転面は高等学校の数学Ⅲの積分の単元などでも頻繁に取り扱われる題材である。

xz 平面上の z 軸と交わらない曲線 $x = f(u), z = g(u)$ を z 軸の周りに回転すると、 $x = f(u) \cos v, y = f(u) \sin v, z = g(u)$ という式で与えられる曲面が得られる。回転面のパラメーター表示は曲面のパラメーター表示の重要な例であり、黒板で解説し、公式として暗記を促すことも可能であるが、受講者が主体的・実践的に課題解決を行うことによって、パラメーター表示の取り扱いの習熟と、より深い理解に繋がる演習問題となる。

講義時間中にすべての課題を解決できた受講者は少なかったが、課題 1 の曲線の表示、課題 3 の曲面の表示は最終的に多くの受講者が到達しており、コマンドが上手く入力できなかった場合も周囲と相談し、画面を見せ合うなど、工夫して課題に取り組む様子が見られた。

3. 自主学習教材

曲面論の授業における GeoGebra の活用に際し、eALPS からダウンロードして使用できる教材の開発を行っている。2019 年度の講義では、空間曲線の動標構の教材を作成した。空間曲線のトピックにおいて、動標構の概念は基本的かつ重要な内容であり、講義で使用している教科書では次のように定義されている（中内 2005）。

定義 2.3.1 $C'(s) \neq 0$ であるような空間曲線 $C(s) (s \in I)$ に対して、以下のように構成されたベクトルの組 $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}_{s \in I}$ のことを、曲線 C の動標構と呼ぶ。

$$e_1(s) = \frac{C'(s)}{\|C'(s)\|} = C'(s), \quad e_2(s) = \frac{\|C''(s)\|}{C''(s)}, \quad e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s).$$

ここで、 $C(s) (s \in I)$ は弧長パラメーター s （接ベクトルの長さが 1 になるように選ばれたパラメーター）によって表示される空間内の正則曲線であり、 I はパラメーターの動く区間を表している。『 ' 』は一階微分、『 '' 』は二階微分、『 || 』はベクトルの長さ、『 × 』はベクトルの外積を表す。なお、ベクトルは太字や矢印を用いた表記を用いることも多いが、講義では使用している教科書（中内 2005）の記号に合わせて、太字や矢印を用いずに表している。

この概念を学ぶ際、受講者が事前に身に付けておく必要がある事柄や、ここで新しく理解すべき内容は多い。例えば、 C は \mathbb{R} の部分集合である I から \mathbb{R}^3 への写像であること、弧長パラメーター s の性質、ベクトルの長さ、ベクトルの外積、ベクトルの微分、数式の読み取り（この定義で定められる動標構は、変数 s の関数を成分とする空間ベクトルであることなど）などがあげられる。さらに、三つ組のベクトルが互いに直交する長さ 1 のベクトルであることや、曲線と動標構の位置関係などの性質を一つ一つ着実に理解してゆくことが求められる。

動標構の定義の説明や性質は、講義では教科書を参照しながら黒板で解説を行っている。

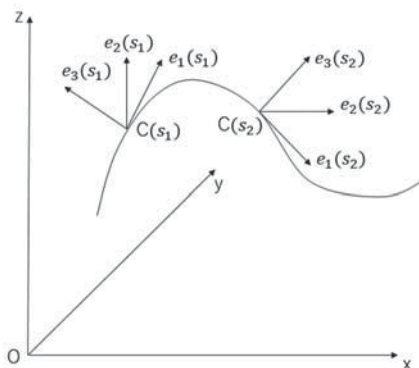


図2 動標構板書例

例えば図 2 のような図を黒板に描き、口頭で補足説明を行う。その際、受講者は $e_1(s_1), e_2(s_1), e_3(s_1)$ と $e_1(s_2), e_2(s_2), e_3(s_2)$ が、動標構にパラメーター s の異なる値 s_1, s_2 をそれぞれ代入したベクトルであることを、教員の説明と式から理解し、イメージすることが必要となる。

平面曲線のパラメーター表示は、「曲面上の幾何学」の初回から取り扱う。例えば $C(s) = (\cos s, \sin s), 0 \leq s \leq 2\pi$ は原点中心半径 1 の円のパラメーター表示であり、パラメータ

— s の値が変わればそれにつれて点 $C(s)$ は曲線上を動く．受講者はこのような曲線のパラメーター表示は概ね理解しているが，接ベクトル，曲率や捩率，動標構等様々な概念が増えてゆくに連れ，計算を行うことはできても，関数としての変化を実感として捉えることが難しくなる傾向がある．例えば，曲線のパラメーター表示の次に学ぶ接ベクトルについても，パラメーターに具体的な値を代入して図示する演習問題を出题すると，最初に教員が例を解説しない限り正答率が低いと感じる．

GeoGebra では，スライダ機能を用いることで，パラメーターの変化に応じて各種微分幾何学的量の変化する過程を動的に描画できる．下記の教材は，スライダ上の点を動かしてパラメーターを変化させることによって，動標構が連続的に変化の様子が視覚的に確認できる仕組みとなっており，動標構の理解に必要な事項のうち，「動標構が，パラメーターの値によって成分が変化する三つ組のベクトルであること」，「動標構は互いに直交する長さ 1 のベクトルであること」，「空間曲線とその動標構との位置関係」が直感的に理解可能である．さらに，空間曲率の曲率と捩率の値も同時に表示され，パラメーターの変化に従って幾何学的量の変化の様子が観察できる．

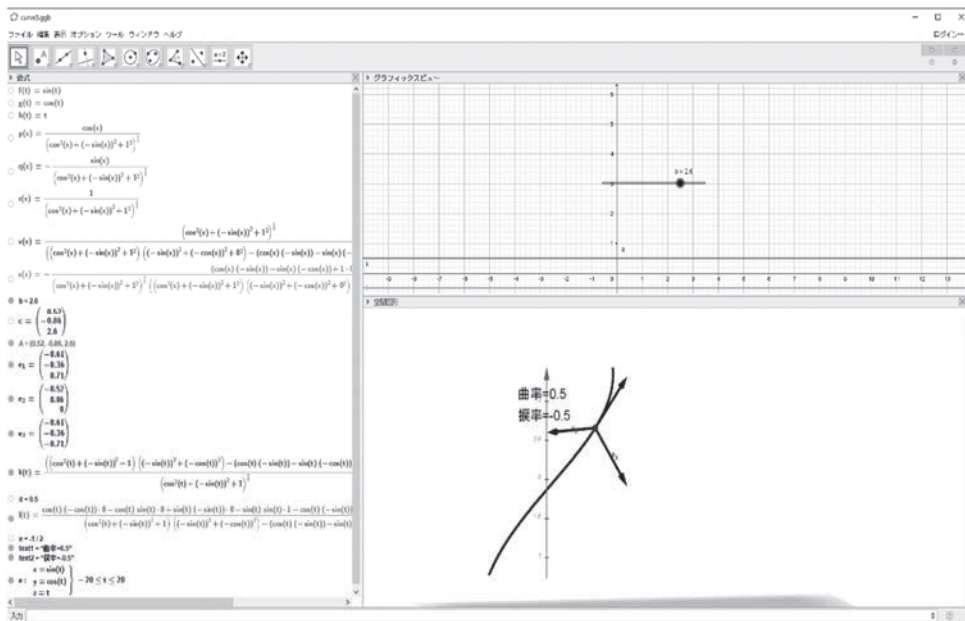


図3 動標構を題材とした GeoGebra 教材

初期設定では常螺旋が表示されるが，空間曲線の式を書き換えることにより，他の任意の空間曲線に対しても動標構，曲率，捩率が与えられる．

本年度の講義では教員が作成したサンプルをeALPSに掲載して配布する形を取ったが，教材を作成する際に使用した数式は「曲面上の幾何学（幾何学Ⅱ）」受講対象の受講者にとって既習の内容のみで構成されており，受講者自身が教材を作成することも可能であろう．

空間曲線の動標構・曲率・振率のみならず、曲線・曲面論には種々の幾何学的量や豊富な具体例が含まれており、その多くは GeoGebra の現在の機能で表示可能である。教員が作成した教材で図形のイメージを培うだけではなく、種々の幾何学的量を計算・表示する教材を受講者自身が作成することは、幾何学的量の定義や性質の理解、導出過程の確認、計算力の向上にも繋がると考えられる。

題材によっては教材作成の難易度は高く、例えば上記の動標構の作例では、弧長パラメーターで定義されている動標構の式を一般のパラメーターに変換し、与えられた曲線の成分の関数によって表示する必要がある。そのためには微分を含んだ式のパラメーター変換、ベクトルの内積・外積・長さ等の操作を組み合わせた複雑な計算を行わなければならない。これらのステップを解決しながら教材を作成することは、動標構の定義の理解のみならず、パラメーターやベクトルの計算に習熟するための発展的な課題となる。

4. 授業終了後のアンケート

「曲面上の幾何学」履修者 27 名を対象に、講義終了後に eALPS 上で授業アンケートを実施し、8 名から回答を得た。設問内容及び回答は以下の通りである。

Q1. GeoGebra を用いることは、曲線・曲面論の理解に有用でしたか。
強くそう思う : 2, そう思う : 6, どちらでもない : 0, そう思わない : 0, 全くそう思わない : 0
Q2. GeoGebra を講義中に使用する際、どのようなタイミングで用いるのが良いと思いますか。
<ul style="list-style-type: none"> ➤ 講義と併用し、常に使用する : 2 ➤ 平面曲線, 空間曲線, 曲面などのトピックを解説した後, トピックごとに使用する : 5 ➤ 最終回や中間・定期試験の前の回などに, GeoGebra を扱う時間をまとめてとる : 1 ➤ その他 : 0
Q3. 「曲面上の幾何学」, 「ユークリッド空間内の幾何学」等幾何学の講義で, eALPS から履修できる自主学习教材や, GeoGebra や Cabri3D を用いた資料など, あれば良いと思う教材があれば記述してください。図形に関する教材に限らず, 例えば「練習問題と解説の資料」などでも構いません (自由記述)
「Grapes」, 「wolfram」, 「授業内で扱った図形, もしくは次週で扱うべき図形に関しては, eALPS に図形を載せておいてほしい。イメージがつかみやすい。」「解説の資料」

本アンケートは講義終了後に行ったため回収率が低く、GeoGebra の利用が印象的だった

受講者が回答している可能性を考慮すると、十分に信頼性がある結果とは言い難いが、回収された結果からは GeoGebra の利用に関する肯定的な評価が読み取れる。

また、信州大学教育学部数学教育コースでは、「曲面上の幾何学」と同時期の 3 年次前期に、必修科目「コンピュータ基礎」を受講する。コンピュータ基礎では、関数グラフ作成ソフト Grapes や動的幾何ソフトウェア Cabri 3D 等の各種ソフトウェアの使用法を学ぶ。Q3 の解答からも、GeoGebra だけではなく、受講者にとって馴染みがあり使いやすいソフトウェアで作成した教材への需要も想定される。

5. 今後の課題

本年度は GeoGebra の利用を最終回に行ったが、受講者アンケートの結果を受けて、次年度以降はトピックの区切りごとに用いるか、あるいは視覚的な理解が有用となる場面でも補助的に使用してゆく形が望ましいと考える。講義序盤の早い段階から GeoGebra を使用することにより、受講者が操作に慣れ、講義後半の複雑な具体例や幾何学的量を学ぶ場面の活用が可能となるだろう。さらに、大学での講義の理解向上のみならず、ソフトウェアの操作に習熟することによって、実習授業で図形に関する単元を扱う際に、教材作成の有用なツールとなることが期待される。

「曲面上の幾何学（2019 年度入学者以降幾何学Ⅱに名称変更）」の教材を増やし、講義に活用し、eALPS 上で自主学习教材としても提供することにより、本格的に講義への導入をはかる。また、本年度の講義終了後の受講者アンケートは十分な回収率を確保出来なかったため、次年度はより多くのフィードバックを得て、今後の教材開発に反映したい。

本年度は実験的な実践であったため、受講者の作成した図を確認し、互いに共有・検討する体制は整っていなかった。将来的には、受講者が作成した図や教材を eALPS 上で共有するなど、その場限りにならない学習環境を構築し、授業時間外の自主学习への活用を図りたい。

「曲面上の幾何学」に加え、数学教育コース必修科目である「ユークリッド空間内の幾何学（2019 年度入学者以降幾何学Ⅰに名称変更）」において、作図題、球面幾何、双曲幾何等のトピックを解説する際、球面三角形の図示や内角の性質等の確認、双曲幾何のポアンカレの上半平面モデルと二点間の距離の導出等、GeoGebra は多くの場面で活用が可能である。GeoGebra による非ユークリッド幾何学のモデル作成は、大西(2012)、阿原(2016)等の実践例もある。現在、「ユークリッド空間内の幾何学」の教材を開発中であり、2019 年度後期から導入予定である。なお、「ユークリッド空間内の幾何学」と関連し、2019 年度前期大学院の講義である「幾何学特論Ⅰ」の講義内において、球面幾何をさらに詳細に取り扱った際に、GeoGebra の併用を試みている。

使用デバイスについても検討の余地がある。スマートフォンを使用していた受講者はパソコンを使用した受講者に比べて正確な入力に苦勞する様子が見られた。操作性の観点からはパソコンの使用が望ましいが、スマートフォンやタブレットの使用は受講者の利便性

が高く、授業外の場面でもいつでも使用できるという利点がある。スマートフォンやタブレットを使用する受講者に向けて導入時のマニュアルを用意するなどの対応を行いながら、どのデバイスを利用してもスムーズに操作できる環境の整備を心掛け、大学の幾何学の講義への GeoGebra のより効果的な導入方法を検討したい。

付記

本研究は日本学術振興会 2018 年度科学研究費補助金 18K02568 「大学の教員養成における幾何学専門科目の e ラーニング教材開発」の助成を受けた。

文献

阿原一志, 2016, 作図で身につく双曲幾何学—GeoGebra で見る非ユークリッドな世界—, 共立出版, 東京

大西俊弘, 2012, 動的幾何学ソフトにおける非ユークリッド幾何学の取り扱いについて,
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsser/27/5/27_No_5_120507/_article/-char/ja/
(accessed 2019.09.24)

示野信一, 2009, 指数関数のテイラー展開 (デモ),
https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~shimeno/math/taylor/taylor_demo1.html
(accessed 2019.09.24)

示野信一, 2009, 正弦関数のテイラー展開 (デモ),
https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~shimeno/math/taylor/taylor_demo2.html
(accessed 2019.09.24)

中内伸光, 2005, じっくり学ぶ曲線と曲面—微分幾何学初歩—, 共立出版, 東京, p.71

濱田龍義, 2011, 大学初年級における GeoGebra の教育利用,
<http://fe.math.kobe-u.ac.jp/MathLibre-2011-doc/geogebra.pdf> (accessed 2019.09.24)

(2019 年 9 月 26 日 受付)