様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 22 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２８７００８

研究課題名（和文）ゴレンシュタイン空間上で展開される導来ストリングトポロジーの研究

研究課題名（英文）Studies on derived string topology developed on Gorenstein spaces

研究代表者
栗林　勝彦（Kuribayashi, Katsuhiko）

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：４０２４９７５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，Chas-Sullivan によるストリングトポロジーを導来圏の観点から考察し，同伴する２次元位相的場の理論に現れる作用素の性質の解明と，具体的計算を進めることである。研究成果として，ある Gorenstein 空間のループコホモロジー上の双対ループ(余)積を，シフト型 Eilenberg-Moore スペクトル系列を用いて決定した。また，Chataur-Menichi により導入された分類空間のループホモロジーの Batalin-Vilkovisky 代数構造を，ホモロジー的共形場理論に現れるプロップの「符号問題」を解くことで，次数付きの理論として決定し完成させた。

研究成果の概要（英文）：We have investigated string topology initiated by Chas and Sullivan from a derived categorical point of view. In particular, the duals to the loop (co)products on the loop cohomology of Gorenstein spaces have been considered by using the torsion functor in appropriate derived categories on singular cochain algebras. We see that the Eilenberg-Moore spectral sequence converging to the relative loop homology works well in determining explicitly the loop homology of a homogeneous space. The second result concerns with string topology on classifying spaces in the sense of Chataur and Menichi. The Batalin-Vilkovisky algebra structure on the loop cohomology of the space is determined provided the cohomology of the given classifying space is isomorphic to a polynomial algebra. Surprisingly, in a more general case, the computation allows us to solve so-called the ``sign issue" on the prop which gives rise to homological conformal field theory on the loop homology on classifying spaces.

研究分野：幾何学

キーワード：ストリングトポロジー　ループ空間　位相的場の理論　分類空間　Eilenberg-Moore スペクトル系列　加群微分子

１．研究開始当初の背景

1990 年代後半，Chas-Sullivan により創始された**ストリングトポロジー**は，多様体のループ空間のホモロジー (以下，ループホモロジー) に様々な代数構造をもたらした。今日，そのホモロジー上には２次元位相的量子場理論 (TQFT) やホモロジー的共形場理論 (HCFT) 構造が見出され，ループホモロジーの持つ豊かな情報に多くの研究者は魅了されている。その創成期においては，向きづけられた閉多様体 M に対して，自由ループ空間 LM (一次元球面から M への連続写像がつくる位相空間) のホモロジー上に可換な結合的積，Chas-Sullivan ループ積が定義された。この積を定置ループに制限する場合は，M のホモロジー上の交叉積を与え，また基点付きループ空間への制限によりそのホロジー上の Pontryagin 積が得られる。したがって，ループ積は交叉積と Pontryagin 積の融合であるといえる。さらに，この積は TQFT の立場からは，ペア・オブ・パンツ・コボルディズムから得られる作用素として解釈される，TQFT に組み込まれる。

2000 年代初頭，Cohen-Jones により Thom 複体と潰し写像を用いたループ積のホモトピー論的解釈が与えられた。これにより向き付けられた閉多様体や Borel 空間上での Thom 理論によるループ積の系統的構成方法が明確になった。また同時期，Félix, Thomas は上述のストリングトポロジーの適用範囲を向き付けられた閉多様体の世界から **Gorenstein 空間**の世界へと広げた。位相空間 X の Gorenstein 性は，X の体 **K** 係数の特異コチェイン代数上の導来圏において，**K** から X のコチェイン複体への Home-set が一次元ベクトル空間となることで定義される。向き付けられた閉多様体はその Poincaré 双対性により Gorenstein 空間となる。また，連結 Lie 群の分類空間や Lie 群作用を持つ可微分多様体の Borel 構成も Gorenstein 性を持つ。

2010 年代前半には，Chataur-Menichi により，分類空間のストリングトポロジーが HCFT 構造を持つ形で，整備された。このように本研究開始当初において，ストリングトポロジーは多くの研究対象を巻き込みながら，その発展期に入っていた。一方，計算手法の開発に関しては，Cohen-Jones-Yan による Lerry-Serre 型スペクトル系列があるのみで，一般理論の発展を支える計算理論の未発達部分が指摘されつつあった。そこで，研究代表者は，Luc Menichi 氏(Angers 大 (フランス))と内藤 貴仁 (東大数理)と共に，従来の **Eilenberg-Moore スペクトル系列** (EMSS)に改良を加え，ストリングトポロジー版の構成を進めていた。

２．研究の目的

Gorenstein 空間に対して定義されるループ積とループ余積を導来ストリングトポロジーの枠組みで考察し，次の目標をもって本研究を遂行した。(I) 相対ループホモロジーに収束するシフト型 EMSS の一般的な性質の解明，特に拡張問題の解決方法の確立と具体的な計算の手法を考察し，等質空間上の２次元位相的場の理論構造を決定する。(II) Lie 群の分類空間のループコホモロジーにおける次数付き Batalin-Vilkovisky (B-V) 代数構造の決定，そして (III) ループコホモロジーが持つ D-ブレーン付き開閉２次元ホモロジー的共形場理論の具体的計算とその非自明性を検証する。

３．研究の方法

ストリングトポロジーにおける計算の難しさは，ループホモロジーの関手性の欠如がもたらす。そのため，2 つのループホモロジーを比較考察するために，双対版を考え，仲介者として，比較を行う方法を導入した。さらに上述の EMSS のストリング版を導入し，具体的計算を進めるという戦略を立てた。また，研究代表者が 10 年ほど前，ループ空間のコホモロジー研究のため導入した 加群微分子が，Lie 群の分類空間のストリングトポロジーの研究に役立つことが分った。 この道具と HCFT 構造，特に Lantern 関係式を用いて，分類空間のループ(余)積さらには B-V 代数構造の解明を進めた。ストリング作用素をカップ積の言葉に翻訳するという考え方が基になり，具体的な計算を遂行出来ることになる。実際，B-V 作用素はカップ積に関して Leibniz 則をみたすので，カップ積とループ(余)積の間の関係式の解明が同時に，ループコホモロジーの B-V 代数構造を決定する。

こうした研究を着実に遂行するため，研究協力者の招聘，研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」および「(非)可換代数とトポロジー」を各年開催し，研究交流を行なうと共に，本研究に必要な情報収集にも努めた。

４．研究成果

研究目的(I)について： Gorenstein 空間 X のループホモロジー上で定義されるループ(余)積を直積空間 X×X の特異コチェイン代数上の導来圏で考察することで，それら(余)積を完全に捩じれ群関手の言葉で記述することに成功した。この解釈を用いて，ループホモロジーに収束するシフト型 EMSS を構成した。具体的計算に関しては，ある等質空間のループコホモロジー上の双対ループ(余)積を完全に決定した。まず，第一空間内を基点が動き、全体は第二空間内を移動するそのようなループからなる相対ループ空間を考える。この空間のホモロジーは，第一空間が Poincaré 双対空間である場合，Chas-Sullivan ループ積を一般化した積構造を持ち，**相対ループホモロジー**と呼ばれる。まずこの積を相対ループホモロジーに収束する

シフト型 EMSS に導入し，その第二項が第一，第二空間のコホモロジーの Hochschild コホモロジーで記述できることを示した。一般のループホモロジーでは期待できない関手性を相対ループホモロジーは許容している。この性質をさらに圏論的に整理した。特に相対ループホモロジーは第二空間 M を固定することで，その上の Poincaré 双対空間がつくる圏から M の基点付きループホモロジー上の代数がつくる圏への関手を与えることを示した。また第一空間 N を固定することで，N を上空間にもつ空間の圏から N のループホモロジー上の代数がつくる圏への関手になる。

さらに，コホモロジー環が単生成である空間および低次元の Stiefel 多様体に応用し，それらのループホモロジーを完全に決定した。この結果は R.L. Cohen, J.D.S. Jones, J. Yan や D. Chataur, J.-F. Le Borgne による Leray-Serre 型スペクトル系列を用いた計算の再確認であるばかりでなく，Hochschild コホモロジーによるより一般的な代数計算がループホモロジーの計算に適用可能であることも示したことになる。また EMSS の比較により G/SU(2)型の等質空間の双対ループホモロジーを完全に決定することにも成功した。上述の計算において，シフト型 EMSS の境界準同型写像の考察から，スペクトル系列の拡張問題を解く一つの方法を与えたことは特筆される。以上の結果はすべて論文[2][3]としてまとめられた。

研究目的(II)について：正の次元を持つ Gorenstein 空間に対して，上述のスペクトル系列は上手く機能する。しかし，0 または負の次元を持つ Gorenstein 空間に適用する場合，系列の各項で全ての作用素が自明になってしまう。特に連結 Lie 群 G の分類空間 BG は次元 − dim G の Gorenstein 空間であり，BG 上のストリング作用素の計算にシフト型 EMSS は適用できない。そこで，ループコホモロジーに現れるストリング類の研究で，研究代表者が導入した**加群微分子**を応用して，分類空間上のストリングトポロジーの研究を進めた。共同研究者 Menichi 氏と内藤氏とは連絡を密に取り合い着実にこの方面の研究を遂行した。特に 2016 年に Menichi 氏を信州大学に招聘し，集中的セミナー行なった。結果，ファイーバーに沿う積分写像の次数を考慮した Koszul サインに基づき，一般論の構築を進めることができた。これにより，シフト型 EMSS による計算では捉えられなかった現象を考察する方法および計算手法を得たことになる。さらに分類空間上のストリングトポロジーの HQFT 構造から得られる，ループコホモロジーの次数付き B-V 代数構造を明らかにした。実際，加群微分子を応用した分類空間のストリングトポロジーの具体的計算により，そのモデルケースの B-V 代数構造を明らかにしている。具体的には，(*)連結 Lie 群 G の分類空間 BG の体 K 係数コホモロジーが多項式環になっているという仮定のもと，

1) 分類空間 BG の体係数ループホモロジーのループ積は自明であるが，ループ余積は単射であり，したがって十分に非自明であることがわかった。

2) 分類空間 BG の体係数の双対ループ余積から定義される B-V 代数構造をそのモデルケースで明らかにした。

3) 回転群 SO(3)，およびランク 2 の単連結コンパクト単純例外 Lie の分類空間のコホモロジー上定義される B-V 代数構造を完全に決定した。

また，上述の 2)の結果を用いてプロップ作用素上の「符号問題」を解決した。モデルケースを考えることで仮定(*)をおくことなしに, Chataur-Menichi により導入された分類空間のループコホモロジーの B-V 構造を次数付き理論として完成させたことになる。以上の結果を Menichi 氏との共同研究としてまとめ Canadian Journal of Mathematics に投稿，改訂中である。(６月現在，受理)

与えられた空間が Gorenstein 空間になるための条件を考察することは導来ストリングトポロジーを豊かにするという意味においても重要である。Hopf 空間に Gorenstein 性質の認識原理を適用し，単連結 Hopf 空間 G が Gorenstein 空間であるための必要十分条件は G のコホモロジー環がネーター的であるという結果を得た。

さらに Hopf 空間に対するループ積の公式も確立した。結果，ループ積は Pontryagin 積と交叉積のテンソル積で記述できることになる。こうしてネーター的 Hopf 空間のコホモロジー環が有限次元でない場合，ループ余積は全て自明であることが判明した。特に単連結 Lie 群の２重ループ空間の有理係数上のループ積は自明となる。無限次元の Hopf 空間に対するループ積の挙動をはじめて捉えた結果といえる。これらの結果はプレプリントとしてまとめられている。

次数付き微分代数上の加群がつくる導来圏は三角圏になる。研究代表者は，三角圏の対象に関して，Avramov-Buchweitz-Iyengar-Miller が導入したレベルの概念を用いて，位相空間の新しいホモトピー不変量 **空間のレベル** を導入した。このレベルの下からの評価は，ゴーストと呼ばれる写像の列の長さにより与えられる。分類空間のストリング作用素を誘導する Gysin 写像はこのゴースト写像になっており，そのゴースト長の評価を与えることで分類空間のレベルの下からの評価式を得ている。このように，導来ストリングトポロジーとの思わぬ繋がりが，本研究で明らかになった。これらの結果は論文[1]としてまとめられている。

研究目的(III)について：研究の 4 年目後半から最終年度においては，Guldberg による Lie 群の分類空間のストリングトポロジーが**ラベル付き(D-ブレーン)２次元開閉位相的**

場の理論構造を持つという結果を，導来ストリングトポロジーの枠組みから再考し具体的計算の可能性を探った。開弦に対応する部分には，Lie 群の２重コセットも現れ，閉弦理論をさらに豊かにする。閉弦に対応する分類空間のループホモロジーとこれら空間のホモロジーが，どのように融合しラベル付き場の理論の代数構造を決めているかを明確にすることが重要である。すなわち非自明な拡張になるかどうかの検証が必要である。そこで，特に開弦理論と閉弦理論を結ぶホイッスル・コボディズムが誘導するストリング作用素の計算方法の考察を進めた。

Lie の分類空間，Borel 構成，オービフォールドを統一的に扱える位相的スタックの研究が活発になっている。この中，Behrend-Ginot-Noohi-Xu により，位相的スタック上のストリングトポロジーが構築された。本研究においては，この理論における作用素の計算および，特性の解明にも力を注いだ。位相的スタックを具体的に扱うためには，そのコホモロジーの計算が重要であり，そのためにはスタックに同伴する位相亜群の脈帯コホモロジーに収束するスペクトル系列の構築が最重要課題であることまで突き止めた。

このように研究最終年度は，この５年間のまとめとなる研究の年であると同時に，導来ストリングトポロジーの拡張可能性を検討する研究も遂行した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

[1] <u>K. Kuribayashi</u>, The ghost length and duality between chain and cochain type levels, Homology, Homotopy and Applications, 18 (2016), 107-132.
http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2016.v18.n2.a6

[2] <u>K. Kuribayashi</u>, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Israel Journal of Mathematics, 209 (2015), 745-802.
https://doi.org/10.1007/s11856-015-1236-y

[3] <u>K. Kuribayashi</u>, L. Menichi and T. Naito, Behavior of the Eilenberg-Moore spectral sequence in derived string topology, Topology and its Applications, 164 (2014), 24-44.
https://doi.org/10.1016/j.topol.2013.12.003

〔学会発表〕（計　2　件）

[1] <u>栗林 勝彦</u>: Lie 群の分類空間のループコホモロジーにおける双対ループ余積, 2016 年度 日本数学会秋季総合分科会 トポロジー分科会 2016 年 9 月 15 日（木）於 関西大学

[2] <u>栗林 勝彦</u>: Hopf 空間のストリングトポロジー, 2014 日本数学会 秋季総合分科会 トポロジー分科会 2014 年 9 月 25 日（木）於 広島大学東広島キャンパス

〔その他〕
ホームページ等
Katsuhiko KURIBAYASHI
http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/home.html

６．研究組織
(1)研究代表者
栗林 勝彦（KURIBAYASHI, Katsuhiko）
信州大学・学術研究院理学系・教授
研究者番号：40249751

(4)研究協力者
Luc Menichi
Angers 大（フランス）・講師

内藤 貴仁（NAITO, Takahito）
東京大学・数理科学研究科・
特別研究員(PD)
研究者番号：20724511