

# 子どもが数学的モデル化過程を遂行することを促す授業づくり

阿部 将樹 教職基盤形成コース

キーワード：数学的モデル化過程，モデルの記述可能性

## 1. 研究動機・研究問題・研究の方法

数学の授業で日常生活や社会の事象を取り入れることによって、数学と社会とのかかわりや、数学を学ぶことの意義を子どもたちが考えられるようになる(永田, 2004)。それゆえ、学校数学において、数学を用いて日常生活や社会の事象の問題を解決することが重視されている。この数学を用いて日常生活や社会の事象の問題を解決する一連の過程は、数学的モデル化過程と呼ばれる(三輪, 1983)。

しかし、日常生活や社会の事象に数学を結びつけて考えることには、様々な困難がある。例えば、浜田(2010)は、事象を数学の問題へ作り替えることや、結果を日常生活や社会に照らし合わせて考えることに困難をきたす子どもが少なくないことを指摘している。また、私自身も実践した際、日常生活や社会の事象に数学を結びつけて考えることに困難をきたす子どもを確認するどころか、教師としての私がそれを無自覚のうちにやってしまった。

そのため、子どもが数学的モデル化過程を遂行するために何をすべきか、更には、その授業づくりにおいて教師は何をどうすればいいかを明確にする必要がある。そこで、本研究では、以下の研究問題の解決に取り組む。

- ①子どもが数学的モデル化過程を遂行するとは何のために何をどうすることか。
- ②子どもが数学的モデル化過程を遂行することを促すために、教師は授業づくりにおいて何をどうするか。

研究問題の解答を導くために、まず、子どもが数学的モデル化過程を遂行することを、主として三輪(1983)、さらに授業実践した際の子どもの姿に基づき中学生に限定して特徴づける。次に、子どもが数学的モデル化過程を遂行することを促す授業づくりにおいて教師は何をどうするかを、対象を中学生に限定し、主として清野(2004)、相馬(2013)に基づき計画した実践の省察を通して明らかにする。

## 2. 子どもが数学的モデル化過程を遂行すること

研究問題①に対する解答は、『現実世界の問題を解決するために、ある数学的知識が適合すると仮定して数学的モデルを作成し、その数学的モデルの妥当性を数学的結論や顕在化した仮定から検討すること。』及び、『現実世界の問題のよりよい解決のために、記述可能性の視点から数学的モデルを改良すること。』である。

### 2.1 数学的モデル化過程

数学的モデル化過程は、図 1 に示されるように、定式化、数学的作業、解釈・評価の三つの段階を踏み、よりよいモデルを目指して、これを繰り返す(三輪, 1983)。ここでの定式化と数学的モデルを改良する際の定式化には、質的な違いが見られる(西村, 2001)。そのため、本研究では、以下のように数学的モデルを使用する段階と改良する段階に分ける。

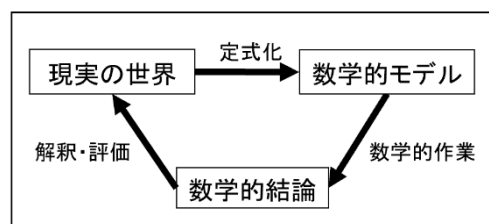


図 1 三輪(1983)による数学的モデル化過程

- 現実世界の問題を解決するために、数学的モデルを作成し、その妥当性を検討すること
- 現実世界の問題のよりよい解決のために、数学的モデルを改良すること

## 2.2 数学的モデルの作成及び数学的モデルの妥当性の検討

現実世界の問題を解決するために、数学的知識が適合すると仮定して、数学的モデルを作成し、数学的結論や顕在化した仮定から、数学的モデルの妥当性を検討する。ここでの仮定の顕在化することには、解決過程や結果の妥当性を確認する役割がある(清野, 2004)。

例えば、単元「 $y=ax^2$ の利用」の第3時「制動距離 54m のときの速度はどれくらいか」にて、Y 生は、以下のように、表やグラフの関係から  $y=ax^2$  が成り立つと仮定して、数学的モデルを作成した。Y 生ははじめ、速度と制動距離には  $y=ax^2$  の関係があると考え、「40km/h を 2 倍した 80km/h では、制動距離が 4 倍になるから、 $y=ax^2$  になる。」と話した。そこで教師が表の他の値でもそれがいえるか問うと、Y 生は 30km/h を 2 倍した 60km/h の制動距離は 4 倍にならないことに気づいた。少し時間を置いて、Y 生は、「でもグラフを見ると  $y=ax^2$  の形だってわかります。だから  $y=ax^2$  と考えていいです。」と話し、(30, 5) を代入して、数学的モデル  $y=1/180x^2$  を作成した。

また、O 生は、以下のように、数学的結論や顕在化した仮定から数学的モデルが妥当かどうかを検討した。O 生は、 $y=1/180x^2$  のうち、 $1/180$  を 0.005 や 0.005555... と考え、 $x=100$  を代入し、 $y=50$  や  $y=55.55...$  という数学的結論を得て、大体 54m と解釈した。その後、定数の変更により数学的結論が変化することやデータの数値が理想化されていることといった仮定を顕在化させ、「ただし、絶対に 100 km/h とは限らない。」と記述した。

## 2.3 現実世界の問題のよりよい解決に向けた数学的モデルの改良

現実世界の問題のよりよい解決に向け、記述可能性の視点から数学的モデルを改良する。ここでの記述可能性とは、数学的モデルが事象をどれだけ記述しているかを指す。数学的モデルの改良は、定式化した内容を変更することで行われる(西村, 2001)。

例えば、単元「資料の活用」の第 13 時「今年の桜の開花日を予想しよう」にて、S 生は、以下のように、記述可能性の視点から数学的モデルを改良した。S 生は、数学的モデルとして 50 年間のデータから代表値を求めた後、新たな数学的モデルとして 15 年間のデータから代表値を求めた。その理由について、「平均(全て)は 13 日だが、ここ十数年から開花日が早いので、2003 年～平均値・中央値を求めると 10 日になるからです。」と記述した。

### 3. 子どもが数学的モデル化過程を遂行することを促す教師の働きかけ

研究問題②に対する解答は、『教師は、子どもが自ら数学的モデル化過程を遂行することを促す働きかけを工夫する。その工夫として、少なくとも、数学的モデルの作成及び数学的モデルの妥当性の検討を促すために「子どもが現実世界の問題を解決する目的を明確にするための場面を設けること」、数学的モデルの改良を促すために「子どもが改良する余地を残した情報を提示すること」や「数学的モデルにおける係数や定数の影響について問うこと」を行う。』である。

#### 3.1 子どもが現実世界の問題を解決する目的を明確にするための場面を設けること

子どもが現実世界の問題を解決する目的を明確にするために、例えば、登場人物の現実世界の事象に関する主張の正誤判断を問う場面を設けることが考えられる。子どもは自分で予想することにより、その予想が正しいかどうか明らかにしたいという気持ちになる(相馬, 2013)。子どもは登場人物の主張の正誤を判断するために、当該の事象に関する数学的モデルを作成して結果を予想する必要性を感じ、解決を目指すようになる。

例えば、2.2の授業実践にて、教師が、制動距離が54mのとき運転手の100 km/hで走行していたという供述は正しいか問うと、多くの子どもが正しくないと判断し、「120km/h。」「案外もっと遅い。」など速度に関する予想を立て、現実世界の問題の解決を目指した。そこで、教師は、子どもたちが当該の現実世界の問題に対し探究の必要性を感じていると判断し、「制動距離が54mとなる速度はどれくらいか」という現実世界の問題を提示した。

#### 3.2 子どもが改良する余地を残した情報を提示すること

子どもが改良する余地を残した情報を提示することとは、数学的モデルの作成に必要な情報を、教師が整えすぎずに提示することである。これにより、子どもは数学的結論が実際的でないことから数学的モデルを改良する。仮定の顕在化には、数学的モデルの改良を促す役割があり、得られた数学的結論が現実世界の事象に対して実際的でないと判断することは、仮定を顕在化する契機となる(清野, 2004)。そこで、子どもが改良する余地を残した情報を提示することは、子どもに数学的結論が実際的でないと判断することを促すと考えた。

例えば、2.3にて、教師は50年分のデータを提示したが、S生はその情報そのままではなく15年分のデータによる数学的モデルに改良した。教師は提示する時系列データを、開花日が早い傾向のある近年ではなく、50年分とした。S生は数学的モデルを改良した理由について、「平均(全て)は13日だが、ここ十数年から開花日が早いので、2003年～平均値・中央値を求めると、10日になるからです。」と記述した。ここでS生は、50年分のデータによる数学的結論が実際的でないと判断し、それを契機に数学的モデルを改良したことがわかる。

#### 3.3 数学的モデルにおける係数や定数の影響について問うこと

数学的モデルにおける係数や定数の影響について問うこととは、数学的モデルの記述可能性を問うことである。これにより、数学的モデルを作成するために用いた情報及び数学的モデルの作成の仕方を振り返ること、記述可能性を顕在化することを促す。

例えば、N教諭が実践した2.2と同様の授業事例にて、教師は数学的モデルの係数が設

定された経緯を問い、子どもたちは数学的モデルを検討した。教師と子どもは、 $y=ax^2$ の  $a$  を定めるために、(30, 5)や(50, 13.5)を代入したもの、全ての値を代入して平均したものを共有した後、「どれを代入すればいいかわからない。」というA生の問いを共有した。教師が係数を定めるために代入する値を選んだ理由を問うと、それぞれ「やりやすいから。」「関係性が見やすいから。」「ばらつきを少なくしたいから。」という意見が出た。その後、教師はどちらの係数の決め方がよいかを問うと、多くの子どもが平均に挙手した。教師が係数の影響について問うことで、数学的モデルの記述可能性が顕在化され、それを契機に子どもは数学的モデルを改良したと考える。

#### 4. 結論の意義・課題

本研究は、子どもが自ら数学的モデル化過程を遂行することを促す教師の働きかけを三つ提案した。これらは、日常生活や社会の事象に数学を結びつけて考えることの困難のうち、数学的結論から発展的に考えることに困難をきたす子どもへの支援となる。

また、本研究を通して、子どもが数学的モデル化過程を遂行することを目指した際の私の授業観が変容した。これまで数学的モデル化過程といったとき、特定の数学的モデルを作成させることに必死になっていた。しかし、子どもたちは、学習や日常生活での経験を結びつけて様々な数学的モデルを作成し、満足いかなかったら自分から問題のよりよい解決を目指して、数学的モデルを改良する。子どもは「これってどうなるんだろう」、「もっといい解答はないか」という問いから、探究する必要性を感じて数学的モデル化過程を遂行する。だからこそ、教師には、子どもがこのような問いを抱くための支援が求められる。

本研究での授業実践は、それぞれ単発であり、子どもが数学的モデル化過程を遂行するために必要な資質・能力の高まりを段階的に見ることができていない。今後は、カリキュラムの位置づけや、小学生も含めた学年を超えた段階的な指導の在り方についても検討したい。

#### 文 献

- 浜田兼造 (2010). 数学的モデル化のサイクルを実現する授業に関する研究: 「ガソリンの割引カード」を例にして. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 92(9), 11-18.
- 三輪辰郎 (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. 『筑波数学教育研究』(筑波大学数学教育研究室), 第2号, 117-125.
- 永田潤一郎 (2004). 「比例するとみなす」ことのよさについての考察. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 86(3), 13-20.
- 西村圭一 (2001). 数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 83(11), 2-12.
- 清野辰彦 (2004). 数学的モデル化における「仮定の意識化」の役割: レポート分析を通して. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 87(7), 2-12.
- 相馬一彦 (2013). 『「予想」で変わる数学の授業』. 明治図書.