

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 21 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800055

研究課題名(和文)無限次元群論の関数解析的研究

研究課題名(英文)Functional analytic study on infinite dimensional groups

研究代表者

松澤 泰道(Matsuzawa, Yasumichi)

信州大学・学術研究院教育学系・助教

研究者番号：60645620

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 自己共役作用素に関連する同値関係の研究を記述集合論の立場から行った。特に、2つの自己共役作用素がユニタリ共役とコンパクト作用素の撰動でうつりあえるとき、この2つの自己共役作用素はワイル・フォンノイマン同値であると名付け、この同値関係が可算構造によって分類できないことを証明した。

(2) 有限型フォンノイマン環のユニタリ群に埋め込める位相群の研究を行った。このような群は両側不変距離を持ち、無限次元ヒルベルト空間上のユニタリ群に埋め込める。この2つの条件が十分条件でもあるかがポパによって提起されていたが、この問題を否定的に解決した。

研究成果の概要(英文)：(1) We studied the unitary equivalence relation modulo the compacts for self-adjoint operators from a descriptive set theoretical point of view. It was shown that this equivalence relation cannot be classified by countable structures.

(2) We studied topological groups which can be embedded into the unitary group of a finite von Neumann algebra. Such groups are called finite type groups. Finite type groups admit a compatible bi-invariant metric and can be embedded into the unitary group on a Hilbert space. It was shown that these two conditions are not sufficient to be a finite type group.

研究分野：関数解析

キーワード：無限次元群 ユニタリ群 自己共役作用素 同値関係 記述集合論

### 1. 研究開始当初の背景

位相群とは、群であると同時に Hausdorff 位相空間であり、群演算が連続になっているもののことをいう。位相群には大きく分けて、局所コンパクトなもの、非局所コンパクトなものがある。ここでは非局所コンパクト群を無限次元位相群と呼ぶことにする。無限次元位相群は、位相空間上の自己同相群や、多様体上の微分同相群、Hilbert 空間上のユニタリ群など、数学的対象の対称性を表す群として、極めて自然に現れる。局所コンパクト群上には Haar 測度と呼ばれる、左平行移動不変な正則 Borel 測度が唯一存在する。これをもとに関数空間やその上の正則表現を作り、群の性質を関数解析的に捉えることができる。一方、無限次元位相群上には Haar 測度は存在しない。これは、無限次元位相群の研究には、局所コンパクト群のそれとは全く別の新しい方法が必要であることを意味する。

無限次元位相群の研究で大切な道具は一樣構造である。位相群上には自然な一樣構造が 4 つある。このうち最弱な一樣構造は Roelcke 一樣構造と呼ばれ、この一樣構造に関してプレコンパクトな位相群を Roelcke プレコンパクトであるという。コンパクト位相群は自明に Roelcke プレコンパクトであるが、逆に局所コンパクト位相群で Roelcke プレコンパクトなものはコンパクト位相群に限る。この意味で Roelcke プレコンパクト性は真に無限次元的な現象である。この現象は左右の一樣構造が極端にずれているときに生じる。Hilbert 空間上のユニタリ群や無限置換群などが Roelcke プレコンパクトな位相群の例である。

一方、これとは対極に、4 つの一樣構造がすべて一致する位相群を SIN 群という。SIN 群は両側不変距離を持つという際立った性質を持つ。また、逆に両側不変距離を持てば SIN 群である。このクラスの群には離散群、コンパクト群、可換群、有限 von Neumann 環のユニタリ群などが含まれるが、他の例の構成も含め、その性質は良くわかっていない。

### 2. 研究の目的

Hilbert 空間上のユニタリ作用素たちの作る群であるユニタリ群の性質を理解することを目的とする。ユニタリ作用素は量子力学において時間発展を記述する対象であり、この観点からもユニタリ群の研究は重要である。特に、以下の 2 つに取り組む。

#### (1) Popa の埋め込み問題の解決。

有限 von Neumann 環のユニタリ群の部分群は両側不変距離を持つので SIN 群である。また、このような群は Hilbert 空間上のユニタリ群に自明に埋め込める。では逆に、Hilbert 空間上のユニタリ群に埋め込める SIN 群は適当な有限 von Neumann 環のユニタリ群に埋め込めるだろうか。この問題を Popa の埋

め込み問題という。Popa はコサイクル超剛性定理の観点からこの問題に到達した。

#### (2) 自己共役作用素に関連する同値関係の理解。

ユニタリ群の 1 パラメタ部分群の生成子は自己共役作用素で与えられる。従って 1 パラメタ部分群の研究と自己共役作用素の研究は同値である。2 つの自己共役作用素がユニタリ共役とコンパクト作用素の摂動でうつりあうとき、Weyl-von Neumann 同値であると呼ぶ。この同値関係の複雑さを記述集合論の立場から理解する。

### 3. 研究の方法

(1) については反例を構成する。(2) については Hjorth の turbulent 定理というものが知られており、これを適用する。これによって Weyl-von Neumann 同値関係が可算構造によって分類できないことが分かる。

### 4. 研究成果

(1) Weyl-von Neumann 同値関係に上述の turbulent 定理を適用し、可算構造による分類が不可能であることを明らかにした。具体的な複雑さの決定は今後の課題である。また、同値関係を少し変形し、2 つの自己共役作用素のレゾルベントがユニタリ共役とコンパクト摂動でうつりあうとき同値と定義すると、この同値関係はスムーズであることが分かった。(下記の論文)

(2) 自己共役作用素の解析の難しさは定義域の問題からくることが多い。そこで 2 つの自己共役作用素の定義域が等しいときに同値と定義し、この同値関係の複雑さを調べた。具体的には、2 つの数列について、その差が有界であるときに同値と定義したときの同値関係の複雑さに等しいことを証明した。さらに、純粋に特異連続なスペクトルが実数全体に等しい自己共役作用素は、自己共役作用素全体の集合に強レゾルベント収束の位相を入れたとき、稠密な  $G_\delta$  集合をなすことを証明した。(下記の論文)

(3) 群の一般化の 1 つであるハイパー群の構造に関する結果を得た。具体的には、位数 3 までのハイパー群は可換であることが知られていたが、位数 4 のハイパー群も可換であり、位数 5 で初めて非可換なハイパー群が現れることを明らかにした。群の場合、非可換なものは位数 6 で現れるので、群とハイパー群の違いが表れている。(下記の論文)

(4) 本質的スペクトルが等しい 2 つの自己共役作用素がいつユニタリ共役とコンパクト摂動でうつりあえるかを調べた。具体的には、本質的スペクトルに無限遠で大きな穴があいていなければユニタリ共役とコンパクト摂動でうつりあえることが分かった。

(5) Popa の埋め込み問題を, 反例を構成することで否定的に解決した. 具体的には, まず, 位相群の半直積が SIN 群になるための必要十分条件を求めた. 次に, 離散群の Hilbert 空間上への一様有界表現を考え, 表現空間を加法群とみなして半直積をとる. この群は上述の結果を利用して SIN 群であることが分かる. さらに Hilbert 空間上のユニタリ群へ埋め込めることも分かる. この群が適当な有限 von Neumann 環のユニタリ群へ埋め込めるための必要十分条件は, 一様有界表現がユニタリ化可能であることを明らかにした. ユニタリ化可能でない一様有界表現はたくさん知られているので, これで Popa の埋め込み問題の反例が構成できたことになる.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### [雑誌論文](計5件)

Hiroshi Ando, Yasumichi Matsuzawa, Andreas Thom and Asger Törnquist, Unitarizability, Maurey--Nikishin factorization, and Polish groups of finite type,

Journal für die reine und angewandte Mathematik (2017), 29 pages.

(査読有)

DOI: 10.1515/crelle-2017-0047

Hiroshi Ando and Yasumichi Matsuzawa, When does the Weyl-von Neumann Theorem hold?

Bulletin of the London Mathematical Society 49 (2017), 742-744.

(査読有)

DOI: 10.1112/blms.12064

Yasumichi Matsuzawa, Hiromichi Ohno, Akito Suzuki, Tatsuya Tsurii and Satou Yamanaka,

Non-commutative hypergroup of order five,

Journal of Algebra and Its Applications 16 (2017), 21 pages.

(査読有)

DOI: 10.1142/S0219498817501274

Hiroshi Ando and Yasumichi Matsuzawa, On Borel equivalence relations related to self-adjoint operators,

Journal of Operator Theory 74 (2015), 183-194.

(査読有)

DOI: 10.7900/jot.2014may24.2030

Hiroshi Ando and Yasumichi Matsuzawa, The Weyl-von Neumann Theorem and Borel

Complexity of Unitary Equivalence Modulo Compacts of Self-Adjoint Operators,

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 145 (2015), 1115-1144.

(査読有)

DOI: 10.1017/S0308210515000293

#### [学会発表](計7件)

松澤泰道,

群の従順性とユニタリ化可能性,

今野・竹居研究室セミナー, 2017年10月31日, 横浜国立大学(神奈川県横浜市)

安藤浩志, 松澤泰道,

Groups of unitaries without property (FH),

日本数学会年会, 2017年3月26日, 首都大学東京(東京都八王子市)

松澤泰道,

無限次元群の話,

作用素論作用素環論研究集会, 2015年10月25日, KKR 妙高高原白樺荘(新潟県妙高市)

松澤泰道,

Weyl-von Neumann 同値関係の複雑さ,

日本数学会年会, 2015年3月22日, 明治大学(東京都千代田区)

松澤泰道,

量子力学に於ける時間作用素について, Nagahama Workshop "From Quantum to Life", 2014年11月15日, 長浜バイオ大学(滋賀県長浜市)

松澤泰道,

Weyl-von Neumann の定理の複雑さ,

量子場の数理とその周辺(RIMS 研究集会), 2014年10月6日, 京都大学(京都府京都市)

松澤泰道,

Hilbert-Schmidt 群の Fock 空間上での表現,

札幌数理物理研究集会 2014年9月1日, 北海道大学(北海道札幌市)

#### [図書](計0件)

#### [産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
<https://sites.google.com/site/yasumichimatsuzawa/jp>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

松澤 泰道 (MATSUZAWA, Yasumichi)  
信州大学・学術研究院教育学系・助教  
研究者番号：60645620

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

##### (4) 研究協力者

( )