

## 博士論文審査の結果の要旨

氏名	泉 真之介
学位名	博士 (理学)
学位番号	甲 第 130 号
論文題目	Composition operators and homomorphisms on Lipschitz algebras (和訳：Lipschitz 環上の合成作用素と準同型写像について)
論文審査委員	主査 佐々木 格 谷内 靖 乙部 厳己 筒井 容平 羽鳥 理 (新潟大学)

(博士論文審査の結果の要旨)

数学における保存問題とは、2つの対象の間の特定の性質を保つ写像が与えられたときに、その写像が他の構造も同時に保存するかという問題であり、これは数理科学の多くの分野に現れる。例えば、光の速さが互いに等速で動く座標系に依存しないことから、座標系の間の変換が Lorentz 変換として知られている形に限られる事が導かれる。そして Lorentz 変換は時空のある種の計量を保存する。このように、保存問題は「その写像がある標準形に限られる」という形で解決されることが一般的であり、その標準形から他の構造が保存されることがしたがう。純粋に数学的興味から生じた保存問題としては、古くは 1897 年の Frobenius の研究があり、行列式を保存する写像が考察された。また、1932 年には Banach が連続関数環の間の等距離写像を合成作用素で特徴づけている。前者は代数的構造に関する保存問題であり、後者は位相的構造に関する保存問題といえる。

本研究は、連続関数値の Lipschitz 環の間の準同型写像の分類を行ったものであり、これは Banach の研究に源泉を持つ関数空間の位相構造に関する保存問題である。泉氏の本論文に関連する主結果は 2 つあり、一つは連続関数値の Lipschitz 環の準同型写像が合成作用素で完全に記述できることを示したこと、2 つめは、得られた準同型写像がコンパクトであるための必要十分条件を与えたことである。なお、これらの結果は高木氏 (信州大学) との共同研究の成果である。

1 つめの泉氏の定理について解説する。 $X, Y$  をコンパクト距離空間、 $K, M$  をコンパクト Hausdorff 空間とする。 $X$  から  $C(K)$  への Lipschitz 写像の集合を  $Lip1$ 、 $Y$  から  $C(M)$  への Lipschitz 写像の集合を  $Lip2$  とする。このとき、 $Lip1, Lip2$  は Banach 環とよばれる代数・位相構造をもち Lipschitz 環と呼ばれる。泉氏は、 $Lip1$  から  $Lip2$  への写像  $T$  が準同型であるための必要十分条件が、 $T$  が部分的に一定値をとる合成作用素であるということを示した。これはいくつかの先行研究を包括する一般的な定理である。例えば、 $K$  と  $M$  が 1 点集合であり  $T$  が単位的準同型写像である場合には、この定理は Sherbert の 1963 年の結果を導く。また  $C(K), C(M)$  を収束数列空間・有界列空間とすれば Botelho and Jamison が 2013 年に示していた定理を再現することができる。さらに、 $Y$  がコンパクトかつ  $T$  が単位的な場合には Oi が 2016 年に示した定理に合流する。このように、泉氏の一つめの主定理は、これまでに知られていた 3 つの定理を統一する結果であり、これによって、Lipschitz 環の準同型写像の構造が明確になったといえる。

2 つめの結果は、 $Lip1$  から  $Lip2$  への準同型写像がコンパクト写像であるための必要十分条件を与えたものである。Botelho and Jamison は類似の表現に対して十分条件のみを与えていたが、泉氏の定理は必要十分条件を与えている。また Kamowitz and Scheinberg は限定された条件で  $T$  が単位的であることを仮定し類似の結果を得ていたが、泉氏の結果では  $T$  が単位的であることは仮定されない。泉氏の証明法が既存研究と比べて画期的であるのは、合成作用素をより直接的に構成することに成功した点であり、それによって合成作用素の詳細な評価が可能になった。一方、Botelho and Jamison の研究では、合成作用素が点列の極限として間接的に作られるため、その性質を調べるのが難しく、一方の条件のみを導くにとどまっていた。このように、泉氏の一つめ主定理も、Lipschitz 環の間の写像のコンパクト性に関する既存研究を一新し、統一する非常に強力な結果である。

以上のことから、審査委員会は本論文が学位論文として十分な内容であると判断する。

(公表主要論文名)

- [Shinnosuke Izumi, Hiroyuki Takagi,](#)  
*Compact homomorphisms between algebras of  $C(K)$ -valued Lipschitz functions,*  
*Journal of Mathematical Analysis and Applications, 467 (2018) 315-330*