博　士　論　文　の　内　容　の　要　旨

氏名	泉　真之介
学位名	博士（理学）
学位授与年月日	2020 年 3 月 20 日
論文題目	Composition operators and homomorphisms on Lipschitz algebras （和訳：Lipschitz 環上の合成作用素と準同型写像について）

（博士論文の内容の要旨）

距離空間上で定義された Banach 環に値をとる Lipschitz 関数からなる Banach 環をとりあげ,

1. Lipschitz 環の間の準同型写像の特徴付け
2. Lipschitz 環の間の準同型写像の線形作用素としての性質

を中心に考察する. 特に, Lipschitz 環として, コンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数環に値をとる場合を考える.

1 について: ここで研究された準同型写像の特徴付けは, Banach 環の保存問題とよばれる問題の一種である. Banach 環の保存問題とは,"2 つの Banach 環の間の写像が, ある構造を保存するとき, 同時に他の構造を保存するか?"という問題であり, 古くは G. Frobenius が n 次正方複素行列環の間の行列式を保つ線形作用素を特徴付けている. その後,様々な Banach 環の間のスペクトルや距離構造を保存する写像についての研究が行われてきた. L. Molnár の 2002 年の論文以降, 系統だった研究がされるようになり, 今日に至るまで多くの著者により研究されている. それら, 一連の研究の中で, 関数からなる Banach 環の間の乗法的な保存写像については, 合成作用素によって記述されることが多くの著者によって示されている. したがって, 関数からなる Banach 環の間の乗法的保存写像の根底には, その間の準同型写像(和・スカラー積・積を保つ写像)があると予想される. そこで本論文では, ある種の Lipschitz 環の間の準同型写像を合成作用素によって特徴付ける.

(X, d_X)をコンパクト距離空間とし,$C(K)$をコンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数値連続関数からなる Banach 環とする. Lip(X,C(K))は各点での和・スカラー積・積と Lipschitz ノルムに関して単位元を持つ半単純可換 Banach 環となる. Lip(X,C(K)) から Lip(Y,C(M))への単位元を保つ準同型写像の特徴付けは, 2016 年の S. Oi の論文で行われた. そこでは, 準同型写像が単位元を保つことと, Y が連結であることを仮定しているが, 本論文では, これらの仮定を取り除き, より一般的な準同型写像の特徴付けを行う. そのために, Lip(X,C(K))

の元fを$x \in X$と$\xi \in K$を変数とする$X \times K$上の複素数値関数とみなす．そして，$(x,\xi) \in X \times K$でのfの値を$f(x,\xi)$と表す.この考え方の下，準同型写像Tを次のような合成作用素の形で特徴付けた:

Lip(X,C(K))から Lip(Y,C(M))への準同型写Tは，$Y \times K$の開かつ閉集合$\mathcal{D}$と，各$\eta \in M$に対して，φ^{η}がLipschitz 連続となる連続写像$\varphi: \mathcal{D} \to X$と，各$\eta \in M$に対して，$\psi^{\eta}$が$\mathcal{D}^{\eta}$上で，有限個の値をとる局所的に定値な写像となる連続写像$\psi: \mathcal{D} \to K$を用いて，

$$(Tf)(y,\eta) = f\big(\varphi(y,\eta), \psi(y,\eta)\big) \qquad \big((y,\eta) \in \mathcal{D}\big)$$

と表される．ただし，$(Y \times M) \setminus \mathcal{D}$上では$Tf = 0$である.

ここで得られた結果は以下で説明するように，いくつかの先行研究を包括している．我々の結果で単位元の保存と Y の連結性を仮定すると，S. Oi (2016) の主張となり，K, M を一点集合にすれば，D. R. Sherbert (1963) の結果が得られる．また，収束する複素数列からなる Banach 環cや，有界な複素数列からなる Banach 環l^{∞}は単位元を持つ可換C^*-環であるから，我々の結果は F. Botelho and J. Jamison (2013) の結果の一般化にもなっている.

2 について: 1 で Lipschitz 環の間の準同型写像が合成作用素の形で特徴付けられたので，次にその作用素としての性質を調べる．合成作用素の研究は E. A. Nordgren や H. J. Schwartz の Hardy 空間上の合成作用素の研究にはじまる．その後，種々の関数空間(Bergman 空間，Lebesgue 空間，連続関数の空間など)の上の合成作用素が研究されるようになり，合成作用素の様々な性質(有界性，コンパクト性，弱コンパクト性，フレドホルム性など)が研究された．本論文では，上述の Lipschitz 環の間の準同型写像がコンパクトとなるための必要十分条件を与える．そのために，上述の準同型写像のφとψがみたすべき条件を考察し，次の結果を得た:

Tがコンパクトとなるための必要十分条件は，次の条件をみたすことである.

(i) φが$\mathcal{D}$上の一般化された超縮小写像である.

(ii) $y \in Y$に対して,ψ_yが,$\mathcal{D}_y$上で有限個の値をとる局所的に定値な写像である.

ここで得られた結果は H. Kamowitz and S. Sheinberg (1990) と F. Botelho and J. Jamison (2013) の結果の一般化になっている.