

<実践報告>

## 身の回りの幾何学に関わる教材開発への GeoGebra の活用

昆 万佑子 信州大学学術研究院教育学系

### Utilization of GeoGebra for the Development of Educational Materials for Geometry around Us

KON Mayuko: Institute of Education, Shinshu University

|               |  |
|---------------|--|
| 研究の目的         | <p>小学校・中学校・高等学校の算数・数学の授業において、身の回りの図形の性質を追究する教材開発における、動的数学ソフトウェア GeoGebra の効果的な導入方法を検討する。</p> <p>学部学生の教育現場での幾何学に関する教材作成の実践を支援する。</p>  |
| キーワード         | 幾何学教育 ICT 活用   |
| 実践の目的         | GeoGebra を用いた教材開発と、ICT を用いた幾何学講義の改善を目的とした。   |
| 実践者名          | 昆 万佑子  |
| 対象者           | 信州大学ジュニアドクター育成塾 (39 名), 信州大学教職大学院 (18 名)   |
| 実践期間          | 2019 年 12 月, 2020 年 5 月, 2020 年 7 月  |
| 実践研究の方法と経過    | 2019 年度信州大学ジュニアドクター育成塾及び、2020 年度信州大学教職大学院科目「教科横断内容研究基礎」, 「算数・数学科授業内容研究」において、GeoGebra を用いた演習と、身の回りの図形の性質に関する教材を用いた講義を行った。   |
| 実践から得られた知見・提言 | <p>算数・数学に関わる身の回りの事象を動的数学ソフトウェアを用いて可視化することは、受講者の図形の性質の理解向上に有用であると考えられる。題材によっては生徒・児童自身がモデルを作成することも可能であり、対象となる事物の動きに対するイメージをより確かなものとすることができる。</p> <p>大学の幾何学系の講義においても、受講者が図形の幾何学的性質を表すモデルを作成することは、対象に対する理解を深め、身の回りの図形に関する教材開発を行う際の数学的な素養を培うための効果的な演習となることが期待される。</p> |

## 1. はじめに

身の回りの事象に着目することは、算数・数学の学習における重要な視点である。例えば小学校学習指導要領（平成 29 年度告示）解説算数編（2018）において、『身の回り』に関する記述は二百か所を超え、事象の観察や、具体物を操作して数量や図形に対する思考力・判断力・表現力等を培うことの必要性が繰り返し述べられている。例えば図形の領域においては、第 2 学年では『平面図形の特徴を図形を構成する要素に着目して捉えたり、身の回りの事象を図形の性質から考察したりする力』、第 3 学年では『平面図形の特徴を図形を構成する要素に着目して捉えたり、身の回りの事象を図形の性質から考察したりする力』が目標となる資質・能力（「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」）として挙げられている。また、小学校算数科の内容の骨子として、「②図形概念の形成と基本的な図形の性質の理解」があげられており、「身の回りにあるものの形に目を向けて、次第に図形を捉え、その構成要素に着目しながら基本図形についての概念を形成するとともに、図形を弁別したり、図形を構成（作図）したり、図形の性質を明らかにしたりする」と述べられている。図形領域に限らず、量の把握とその測定の方法の理解、事象の変化と数量の関係の把握、不確定な事象の考察等様々な場面において、「身の回りの事象」に着目することの必要性が言及されている。

また、中学校・高等学校の数学の内容も、それ自体で完結するものではなく、身の回りの事象や、理科等、他教科で履修する内容と密接な関わりがある。

一方、学校における授業の場面では、教室の外に出て『身の周りの事象』を常に観察することは出来ない。教師が黒板に図を描く、児童・生徒自身が頭の中で『身の回りの事象』をイメージする、映像や動画を用いて解説する等様々な方法が考えられるが、本稿では『身の回りの事象』をイメージするための一つ的手段として、動的数学ソフトウェア GeoGebra を用いた教材開発の例を紹介する。

GeoGebra は、幾何、代数、表計算、グラフ、統計、解析をひとつのパッケージにした、教育のすべての段階のための動的数学ソフトウェアである。幾何、代数、表計算、統計が結びついた動的なツールであり、豊富な機能が実装され、対話的な学習教材を作成するための編集ツールとして利用できる。iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook, Linux 用のアプリがダウンロード可能であり、さらに、機能別専用 Web アプリ（関数グラフ、空間図形、幾何、全機能版、拡張現実）がブラウザ上で使用できる。

作成した教材は、点や直線等を動的に動かし、様々な角度から見ることにより、図形の変化を観察することが出来る。空間図形や平面図形の作図操作のうち、特に義務教育段階の算数・数学で用いる基本的な操作は、そのほとんどが実装されているとあってよい。操作は直感的でわかりやすく、教員が作成した教材を提示するだけでなく、パソコンかタブレットが手元があれば、児童・生徒自ら作図を行うことも可能である。さらに、基本的な作図操作のみならず、関数や計算に関する機能も多数搭載されており、より複雑で高度なモデルを作成することが可能である。

本稿では、身の回りにおける算数・数学に関わる教材の一例として、日影曲線、パラボラアンテナ、単振動のモデルを紹介する。また、サイクロイド、ルーローの三角形等、特徴的な幾何学的性質を持つ図形について述べる。

図形の性質を表現するモデルを作成する際には、ソフトウェアの操作の知識のみならず、対象の図形に対する幾何学的な知識が必要となる。大学の教員養成の幾何学の授業において、受講者自身が図形の性質を再現するモデルを作成することは、教材開発の技能を向上させるための良い課題であると同時に、受講者自身の幾何学的な知識を深め、再確認する機会となるだろう。本稿では、大学の幾何学の講義における GeoGebra の活用についても考察したい。

## 2. GeoGebra を用いた教材開発の例

この章では、動的数学ソフトウェア GeoGebra を用いて、身の回りの算数・数学に関わる教材開発を行った実践を紹介する。作成した教材は 2019 年度信州大学ジュニアドクター育成塾の講座において、題材として取り上げた。信州大学ジュニアドクター育成塾はものづくりやプログラミング、理科に興味がある小学校 5 年生から中学校 3 年生の小・中学生を対象としており、国立研究開発法人 科学技術振興機構による「科学技術イノベーションを牽引する傑出した人材の育成に向けて、理数・情報分野の学習等を通じて、高い意欲や突出した能力を有する小中学生を発掘し、さらに能力を伸長する体系的育成プランの開発・実施を行うことを支援」するジュニアドクター育成塾事業として、信州大学が採択されたものである。本実践は、「幾何学の体験」と題して、2019 年 12 月 22 日に、第一期生対象に行った講座である。また、身近な算数・数学と教材開発、GeoGebra の活用という観点から、2020 年度信州大学教職大学院科目「教科横断内容研究基礎」、「算数・数学科授業内容研究」においても、同教材を利用した。

### 2.1 日影曲線

円錐を頂点を含まない平面で切断すると、切り口には楕円、円、放物線、双曲線が現れる。このような立体の切断は、動的数学ソフトウェアを用いた教材開発でも広く取り扱われている題材である。

円錐曲線が日常生活に現れる場面として、日影曲線の例がある。太陽が動くとき、日時計の先端の軌跡は円錐曲線を描く。太陽と日時計の先端を結ぶ直線は、太陽の動きに従って、日時計の先端を頂点とする二つの円錐を形作る。このとき日時計の影の先端は、この円錐と地面が交わって出来る曲線を描く。すなわち、円錐を平面で切断して出来る断面の曲線であることが分かる。

この例を GeoGebra 等の動的数学ソフトウェアを用いて解説することによって、太陽の動きやそれに伴った影の先端の動きを、パソコン上で動かして目で見て確認することが出来る。数学の学習においては、紙の上に図を描き、イメージを培う訓練を行うことも重要であるが、導入段階において動的数学ソフトウェアを補助的に活用することは、図形に対

するイメージを培う際に有用である。

ベネッセ教育研究開発センター・慶應義塾大学佐藤雅彦研究室の『日常にひそむ数理曲線』では、この日影曲線の例をアニメーションで紹介しているが(佐藤 2010)、GeoGebraでも簡単な機能の組み合わせによって、同様のシミュレーションを行うことができる。

まず、 $z$  軸上に線分  $OA$  を描く。これが日時計のモデルとなる。太陽  $B$  の軌跡である円を描き、点  $A$  と点  $B$  を結ぶ直線を描く。この直線と、地面を表す  $xy$  平面との交点  $C$  が日時計の先端を表す点であり、線分  $OC$  は日時計の影である。太陽を表す点  $B$  を動かせば、それに従って日時計の影の先端の点  $C$  が動く様子が観察できる。

さらに、『残像を表示』という機能を用いることによって、太陽が動くに従って直線  $AB$  が円錐を描くことが視覚的に確認できる。さらに、この円錐と  $xy$  平面との交線が日時計の先端の軌跡であることも分かる。以上の操作は、『線分を描く』、『円を描く』、『円の上の点を動かす』、『直線を描く』、『残像を表示する』といった基本的な機能の組み合わせである。なお、下の図では以上の操作に加え、円錐の作図も行っている。

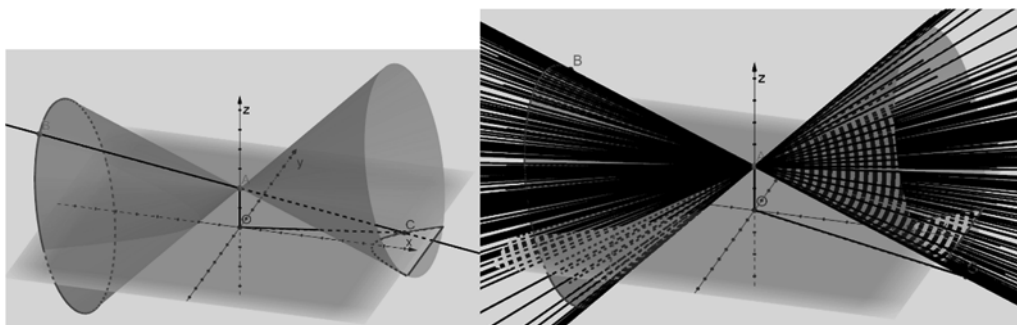


図1 日影曲線

図2 残像の表示

信州大学ジュニアドクター育成塾の講座において、GeoGebraの基本的な機能の説明の後に日影曲線の話題を紹介し、受講者自身で日時計の先端の影の動きを再現するモデルを作成する課題を課した。この講座では時間の都合上、GeoGebraの基本的な操作に受講者が十分に慣れるための時間が取れなかったため、点を取る、線分を描くなどの基本的な操作に馴染んでいない受講者は作成には至らなかったが、一定数の受講者は比較的簡単に日時計の影の軌跡を再現出来ていた。

動的数学ソフトウェアの活用においては、教師があらかじめ準備した作例を再生してみせることでも、物の動きを視覚的に確認することが可能であるが、生徒・児童自身がソフトウェアを用いて身の回りの図形の動きを再現することは、対象の事物の性質への深い理解に繋がる。

例えば上の作例では、太陽、日時計、地面の位置関係を単純化して配置することが必要であり、実際にGeoGebra上で線分や円を描き、自分の手で動かすことによって、対象となる事物の動きに対するイメージはより確かなものとなるだろう。

## 2.2 パラボラアンテナ

パラボラアンテナの形は放物面と呼ばれ、光や音を一点に集める性質を持ち、様々な場面で広く活用されている。ここでは、パラボラアンテナが光や音を一点に集める様子を観察できる GeoGebra の教材を紹介したい。

放物面は、放物線を回転させることによって得られる曲面である。下の図は、パラボラアンテナの断面である放物線に、光や音を表す直線  $l$  が入ってきて、点  $A$  で反射し、直線  $m$  の方向に出て行く様子を表したものである。点  $A$  を放物線上で動かすことによって、反射した光や音の経路を表す直線  $m$  が、一点  $B$  を通る様子を確認することが出来る。すなわち、パラボラアンテナに入ってきた光や音は、点  $B$  に集まることが分かる。この点  $B$  を放物線の焦点という。

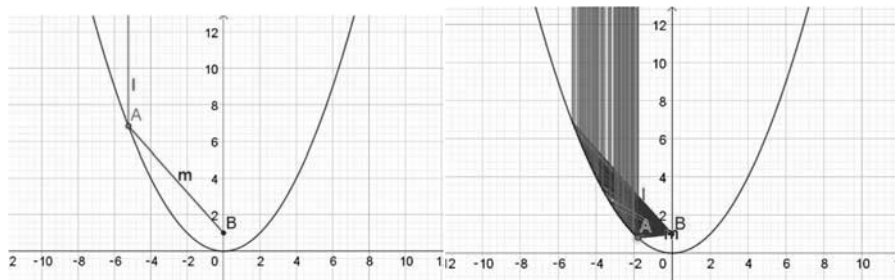


図3 パラボラアンテナの断面

図4 放物線の焦点

このモデルの作成のためには、高等学校までの数学の知識が必要となる。まず、放物線を表す数式  $y = ax^2$  は、高等学校の数学 I において学習する内容である。さらに、光や音は、ぶつかる曲線の接線について、入射角と反射角が等しくなるように反射する。曲線の接線は「曲線にぴったりと接している直線」というように、感覚的に解説することも可能であるが、接線の定義や求め方は高等学校の数学 II で学習する内容である。なお、GeoGebra には接線を描く機能が搭載されているため、放物線の接線の式を自力で計算しなくても、GeoGebra の機能を用いて接線を描くことは可能である。

以上のことを踏まえて、このモデルの作成方法を述べる。まず、放物線を描く。GeoGebra では曲線を表す数式を入力することによって曲線を描くことが出来るので、定数  $a$  に適当な正の数を入れて数式  $y = ax^2$  を入力すれば、上向きの放物線を描くことが出来る。ここで、 $a$  の値が大きければ放物線は尖った形になり、小さければなだらかな形となる。光や音を焦点に集める性質は、 $a$  の値に関わらず成り立つ。次に、光が当たる点  $A$  を放物線上に取る。  $A$  を通り  $y$  軸に平行な半直線  $l$  を描く。これは放物面に入ってくる光や音を表す線である。次に、接線を描く機能を用いて、点  $A$  における放物線  $l$  の接線  $n$  を描く（接線の式を計算して式を入力しても良い）。次に、入射角と反射角が等しくなるように線分  $m$  を描く。例えば、直線  $n$  について直線  $l$  の鏡映を利用すればよい。

点  $A$  を動かせば、それに従って、パラボラアンテナに入ってくる光や音の経路  $l$  と、反

射した後の経路  $m$  が動いてゆき、直線  $m$  は常にある一点  $B$  を通ることが確認できる。

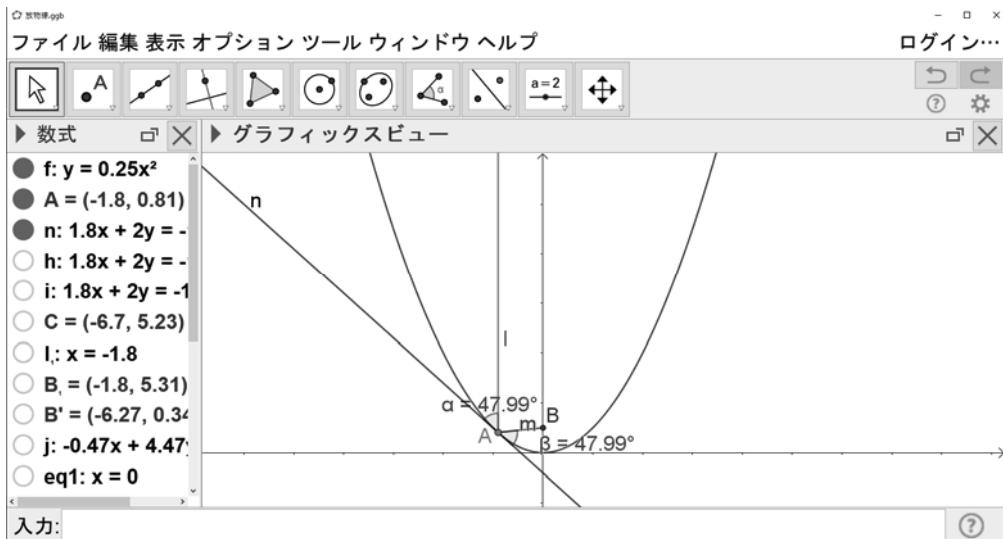


図5 パラボラアンテナの断面と焦点の作図

この作例では、パラボラアンテナの仕組みや放物線の性質を視覚的に理解できる。また、完成したファイルを動かすだけではなく、高校生や大学生が自分自身でモデルを作成することによって、放物線を表す式、接線、放物線の焦点の性質といった数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲで履修する知識を、複合的に、より実践的な形で再確認することが可能である。また、光の反射という物理学の知識との関わりを体感することもできる。

このように、動的な教材は、教育現場において児童・生徒の図形的なイメージを培い、理解を促すためにも有用であるが、大学の教員養成の段階でソフトウェアを用いたモデル作成に習熟しておくことは、良質な教材開発の下地となるだけではなく、教員を目指す学生自身の数学的な知識を深めるためにも有用であると考えられる。

ところで、放物面ではなく半球を用いた場合、反射した光はやはり一点に集まるだろうか？このような問題を考えるときには、上で作成したモデルの一部分を書き換えればよい。最初に描いた放物線の代わりに、円を用いれば、断面が円であるような回転面（すなわち球面）に光が入ってきた場合のモデルを考察することが出来る。実際に動作を確認してみると、点  $A$  を動かしても、光は一点に集まらないことが分かる。

このような実験を、実物を用いることなく手軽に行うことができる点も、ソフトウェアを用いたモデルの利点である。

### 2.3 単振動

次のモデルは、単振動の教材である。

図6の画面上部にある線分はスライダー機能であり、この線分上の点を動かせば、それに従って下の三つの図の中の点が動く。スライダーの点は一定速度でアニメーションと

して動かすことも出来る。

下の左の図は、ばねに重りをぶら下げた図を簡略化したものである。スライダー上の点  
が動くとき、重りは上下に振動する。また、真ん中の円周上の点は、円周の上を一定速度  
で回転する。右の図は、重りをぶら下げたばねを一定速度で横に動かしたときの重りの軌  
跡を表しており、この曲線のグラフは高等学校の数学Ⅱで履修する三角関数を用いて表示  
することが出来る。この三つの点が同時に動いているところを観察すると、どれも点の高  
さ（y座標）が等しくなっていることが分かる。

高等学校で三角関数を履修する際は、まず数学Ⅰで三角比を導入し、数学Ⅱで弧度法を  
学び、一般角の三角関数（正弦関数、余弦関数、正接関数）の定義を述べる。一方で、物  
理において単振動や正弦波を学び、ばねの動きや正弦波のグラフは三角関数を用いて表現  
できることを学習する。この教材は、三角関数とばね・波の関係を視覚化したものである。

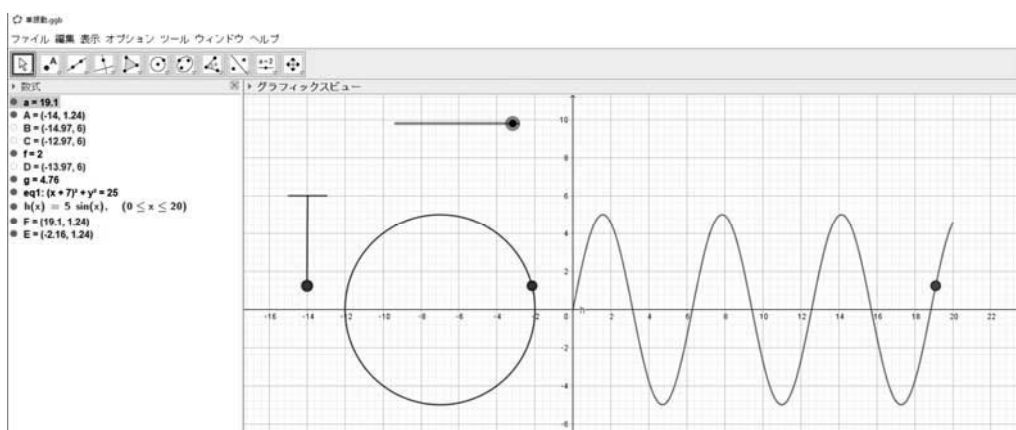


図6 単振動

『日常にひそむ数理曲線』において、三角関数の性質は、振り子を用いた実験や回転灯  
の観察によって分かりやすく可視化されている（佐藤 2010）。GeoGebra を用いたこの教  
材は、このような実験を単純化したモデルとも言える。

## 2.4 サイクロイドとルーローの三角形

小学校・中学校・高等学校での指導内容に含まれている、いないを問わず、身の回りには  
興味深い性質を持つ図形が多数存在する。

信州大学ジュニアドクター育成塾の講座、および教職大学院「教科横断内容研究基礎」、  
「算数・数学科授業内容研究」では、サイクロイドの性質やルーローの三角形の紹介を行  
った。

例えば、自転車のタイヤに印を付けて、自転車が一定速度で真っ直ぐに走ったときの印  
の軌跡をサイクロイドという。これは高等学校の数学Ⅲで紹介される曲線である。サイク  
ロイドには様々な特徴があり、例えば、最速降下曲線としての性質を持つ。ある点からあ  
る点に向けて曲線に沿ってボールを転がして落としたとき、一番早くボールがゴールにた

どり着く曲線の形がサイクロイドである。また、サイクロイドの形は等時性を持つ振り子にも利用されている。さらに、サイクロイドの縮閉線（各点における曲率中心の軌跡）もまたサイクロイドであることも知られている。

ルーローの三角形とは、正三角形の一つの頂点を中心として、他の二つの頂点を結ぶ円弧を描いたとき、これらの三つの円弧からなる図形である。この図形は幅が一定である、すなわち転がしたときに高さが変わらないという性質を持つ。この性質から、ルーローの三角形はマンホールの蓋の形として利用することが出来る。例えばマンホールの蓋が三角形や四角形である場合、穴の上で蓋を持って手を離せば、蓋は落ちるときの向きによっては穴の中に落下してしまう。蓋の形が円やルーローの三角形である場合は、どのような向きで持っても蓋の幅が一定であるため、手を放しても穴の中に落ちることはない。また、ルーローの三角形は正方形（に近い形）の溝を掘るドリルや、部屋の隅まで掃除が出来るロボット掃除機の形にも活用されている。

これらの話題は一般的には小学校・中学校・高等学校の算数・数学で取り扱う機会は少ないが、信州大学ジュニアドクター育成塾の講座では、興味を持つ受講者が特に多い題材だった。

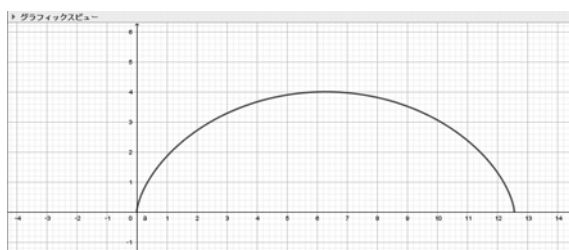


図7 サイクロイド

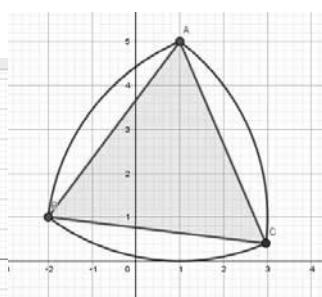


図8 ルーローの三角形

GeoGebra には、世界中の利用者からなる大きなコミュニティがあり、作例がインターネットで閲覧出来る。コミュニティには、教育の各段階における豊富な教材の実例が投稿されており、サイクロイドやルーローの三角形に関する教材も多数公開されている。サイクロイドやルーローの三角形の性質は、これらの教材を用いて動的に視認することが出来る。

また、フォーラムに投稿された教材を活用するだけでなく、これらのモデルは、大学で曲線・曲面論を履修した教員養成段階の学生の知識で、GeoGebra を用いて再現することも可能であろう。サイクロイドやルーローの三角形に限らず、様々な図形の幾何学的性質を可視化するモデルを作成する場合、曲線のパラメーター表示をはじめとして、曲線論の様々な解析的な手法を活用し、対象とする図形の構造を深く追究する必要がある。大学の曲線・曲面論等の講義においては、これらの解析的な手法を紙の上の計算として修得するだけでなく、実際のモデルを再現するために受講者自身が活用を図ることによって、



対象の図形に対する理解を深めることが可能であり、将来的に教員になった際に、身の回りの図形的な事象をモデル化していく数学的な素養を培うための効果的な演習となることが期待される。

### 3. 今後の課題・展望

2019年度の信州大学教育学部数学教育コースの必修科目である幾何学Ⅰ（ユークリッド空間内の幾何学）、および選択科目の幾何学Ⅱ（曲面上の幾何学）において、GeoGebraを導入し、基本的な操作方法の解説や、講義内容と関連する教材の提示を行った。

幾何学Ⅰは、作図やユークリッド幾何学、非ユークリッド幾何学を取り扱う科目である。ここでは球面幾何や双極幾何のモデル、球面正弦定理、球面余弦定理等の解説の際に、GeoGebraを用いて作成した教材を使用した。また、幾何学Ⅱは曲線・曲面論を取り扱う科目であり、曲線・曲面のパラメーター表示や曲率等の各種幾何学的量がGeoGebraで表現できることを、演習形式で紹介した。

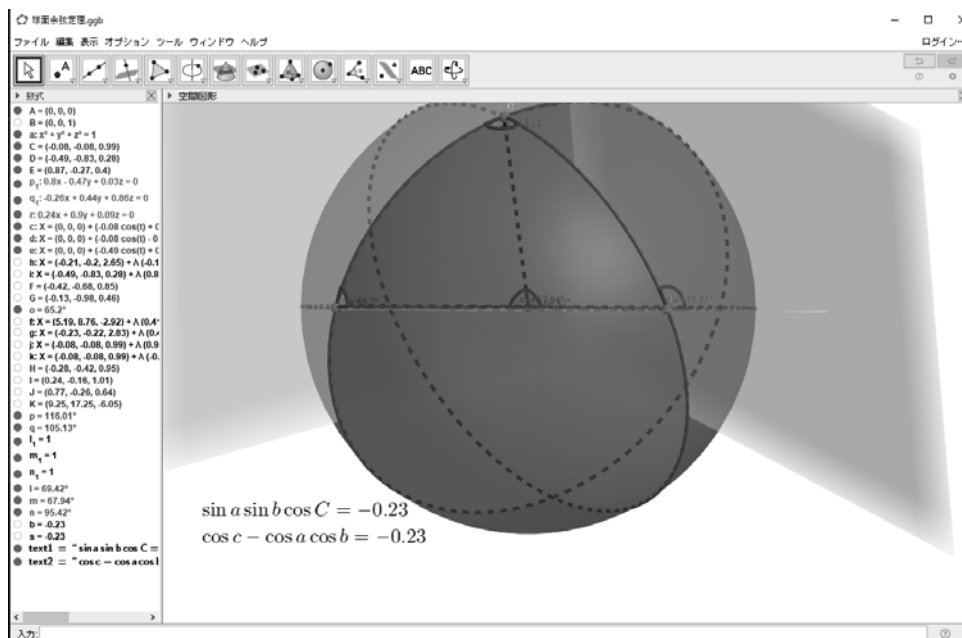


図9 球面余弦定理

しかしながら、講義中のGeoGebraの活用は必ずしも十分であるとは言えず、特定の題材の解説や、基本的な操作の演習に留まっている。今後受講者が、身近な算数・数学に関する教材開発を行う際に、大学の幾何学の講義の内容を踏まえつつ、動的数学ソフトウェアをより積極的に活用してゆくためには、教員が作成した教材を特定の場面で紹介するだけでなく、講義中の様々な場面で頻繁にソフトウェアを動かす機会を設けて、受講者の技能の習熟を図ることが必要であると考え。また、例えば本稿で紹介した教材等を例に

取りながら、算数・数学に関わる身近な事象を動的数学ソフトウェアを用いて表現する実例を紹介し、受講者自身が演習としてモデルを作成する機会を積極的に提供したい。

本年度の幾何学の講義は Zoom を用いたリアルタイムのオンライン授業を行っている。受講者は常にパソコンを開いており、手元で GeoGebra 等のソフトウェアを利用できる環境にある。また、教員のソフトウェアの操作やファイルを受講者が共有しやすい状態であるといえる。大学の数学の講義におけるオンライン授業に関しては、始まったばかりで課題も多く、教員側の研鑽・工夫も必要である。動的数学ソフトウェアとの連携という点において、オンライン授業の環境を生かした枠組みの構築を目指したい。

#### 付記

本研究は日本学術振興会 2018 年度科学研究費補助金 18K02568 「大学の教員養成における幾何学専門科目の e ラーニング教材開発」の助成を受けた。

#### 文献

文部科学省，2018，小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編，日本文教出版株式会社，pp.18-36

佐藤雅彦＋ニューフラテス，2010，日常にひそむ数理曲線，小学館，pp.22-25, pp.46-49

(2020 年 9 月 25 日 受付)