＜研究報告＞

平面上の相似回転の中心の新たな作図法

伊藤　武廣[1]　信州大学教育学部理数科学教育講座
岡部　温樹　長野県高山村立高山中学校

キーワード: 相似回転, 不動点, 岡部の円

１．はじめに

著者の一人である岡部温樹が，合同な２つの正方形を重ねて，そのうち一つの正方形をずらして，２つの正方形の辺と辺の交点が８個できる場合，それらの交点の一つおきの２点を結ぶ線分を直径とする４個の円は１点で交わる（**図１**），という事実に着目して，彼はこの図形の対象を，合同な正方形から合同な長方形へ，さらに，相似な長方形へと発展させても同じ事実が得られる，ということを確認した。その結果，彼は「４つの円の交点は平面上の相似回転（直交変換と相似変換の合成）の不動点である。」という事実，すなわち，「４つの円の交点を得るという事は，平面上の相似回転（直交変換と相似変換の合成）の不動点の作図である。」という事実に気が付いたのである。しかしながら，平面上の相似回転の不動点の作図法に関しては，既に，１９８９年１月号の数学セミナー上で，岡部恒治氏が出題した「エレガントな解答をもとむ」の問題の一つである「不動点の作図問題」で，多くの人たちが，岡部温樹の相似な長方形の場合に，色々な作図法を提案している。

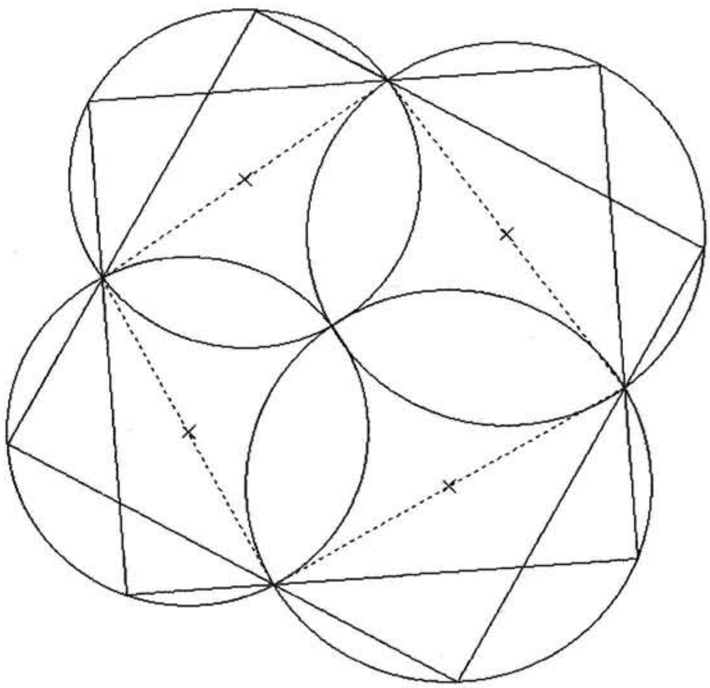

図１

[1] The first author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 17530653), Ministry of Education, Science, Sports and Culture.

そこで，我々は，平面上の相似回転の不動点を，相似な長方形ではなく，さらに単純な相似な三角形で，**“円”**を用いて相似回転の不動点の作図法を試みた。この作図法は，上の「不動点の作図問題」に対する作図法と比較すると，円を使うという極めて単純でスマートな作図法と言える。本論文の目的は，その作図法を紹介するものである。

アファイン変換（1次変換と平行移動の合成）の不動点については，小島誠氏 ([2]) が紹介している。

最初に，前ページのような，岡部温樹が気付いた円（**“岡部の円”**）の性質について述べよう。

2．岡部の円

定理 1.　**図 2** のように，合同な正方形2つをずらして重ねた時，辺と辺の交点が8個できるものとする。このとき，次のような事実が成り立つ。

(1) 8個の交点を1つおきに結んで得られる四角形の対角線は Q で直交し，長さは等しい。

(2) 8個の交点の1つおきの2点を結ぶ線分を直径とする4つの円（**岡部の円**と呼ぶ）は1点 Q で交わる。

(3) 4つの岡部の円の中心を結んで得られる四角形（岡部の四角形と呼ぶ）は正方形である。

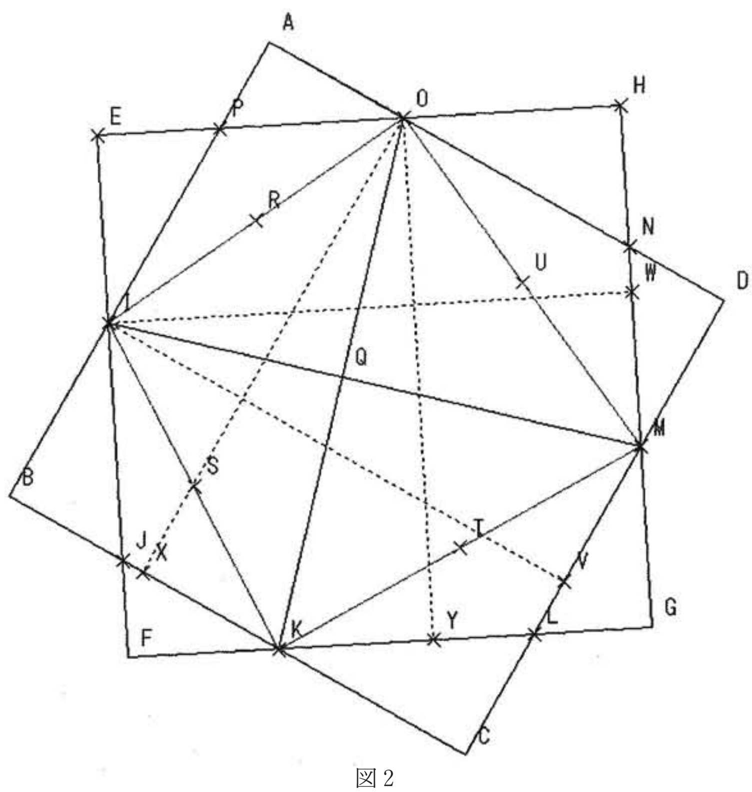

図 2

証明. 先ず，(1) の証明をする。$\triangle OKX$ と $\triangle OKY$ について，OK は共通，$OX = OY$，$\angle OXK = \angle OYK = 90°$ だから，$\triangle OXK \equiv \triangle OYK$ である.

同じく，$\triangle IMV \equiv \triangle IMW$ である。
そこで，$\angle HON = \angle AOP = \angle EIP = \angle BIJ = \angle JKF = \angle CKL = \angle GML = \angle DMN = \theta$ とおくと，

$$\angle OKX = \angle OKY = \frac{180^\circ - \theta}{2} = \angle IMV = \angle IMW$$

となり，$\triangle OXK \equiv \triangle OYK \equiv \triangle IMV \equiv \triangle IMW$ となる。これより直ちに，$OK = IM$ を得る。したがって，四角形 $OIKM$ の対角線 OK と IM の長さが等しい，事が示された。さらに，

$$\angle EOQ + \angle EIQ = \angle OKY + \theta + \angle PIQ = \angle OKY + \angle IMV + \theta = \angle OKY + \angle OKX + \theta$$

$= 180^\circ$　が得られる．四角形 $OEIQ$ の内角の和が 360° である事を用いると，

$$\angle OQI = 180^\circ - \angle OEI = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

となり，対角線 OK, IM が直交している事が示された。以上により，(1) が示された。

次に，(2) を証明する。$\triangle OEI$ と $\triangle OIQ$ は $\angle OEI = \angle IQO = 90^\circ$ の直角三角形だから，線分 OI を直径とする円は点 Q を通る。同じく，線分 IK を直径とする円，線分 KM を直径とする円，線分 MO を直径とする円も点 Q を通る。このように，
“**岡部の円は一点で交わる**”事が示された。

(3) は三角形における中点連結の定理より明らかである。以上により，定理は証明された。

さらに，岡部温樹は，[5] において，対象図形を，合同な正方形から，相似な長方形，正多角形について拡張しても同様の事実が得られるであろうと指摘している。

3. 三角形による相似回転の不動点の作図法

平面上の合同変換（等長変換）は平行移動と回転（直交変換）の積で表される。回転と相似変換の積を“**相似回転**”と呼ぶことにする。すなわち，平面上の点 P をある定点 O を中心（不動点）に回転移動して，さらに，中心 O から出る直線に沿って一定距離移動するという変換のことである。O を原点とし，記号で表現すれば，ϕ を平面上の直交変換とすると，相似回転 φ は，ある正の定数 λ をもって，$\varphi = \lambda\phi$ と表すことができる。もちろん，$\lambda = 1$ のとき，相似回転は回転そのものである。

実際，相似回転の不動点は次の定理で示されるように，３つの円（**岡部の円**）の交点として作図される。

定理 2.　平面上の相似回転 φ により，三角形 $\triangle ABC$ が三角形 $\triangle EFG$ に写り，**図 3** のように，辺と辺の交点が６個 H, I, J, K, L, M できるものとする。この時，４点 A, E, H, J は１つの円 O_1 上にあり，４点 B, F, H, I も１つの円 O_2 上にあり，４点 C, G, I, J も１つの円 O_3 上にあって，さらに，３つの円 O_1, O_2, O_3 は一点 O で交わる。この点 O が相似回転 φ の不動点である。

証明. 3点 A, E, H を通る円を O_1，3点 B, F, H を通る円を O_2 とすると，$\triangle ABC \backsim \triangle EFG$ だから，

$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CA}{GE} \qquad \cdots\cdots(1)$$

を得る。H 以外の円 O_1 と円 O_2 の交点を O とする。$\triangle ABO$ と $\triangle EFO$ において，円周角の定理より

$$\angle HAO=\angle HEO \implies \angle BAO=\angle FEO \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\angle HBO=\angle HFO \implies \angle ABO=\angle EFO \qquad \cdots\cdots(3)$$

を得る。このように，2組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle ABO \backsim \triangle EFO. \qquad \cdots\cdots(4)$$

したがって，$\triangle ABO$ と $\triangle EFO$ の対応する辺の比は等しい，すなわち，

$$\frac{AB}{EF}=\frac{BO}{FO}=\frac{OA}{OE}. \qquad \cdots\cdots(5)$$

次に，$\triangle ABC \backsim \triangle EFG$ より，$\angle ABC=\angle EFG$ で，$\angle ABO=\angle EFO$ だから，

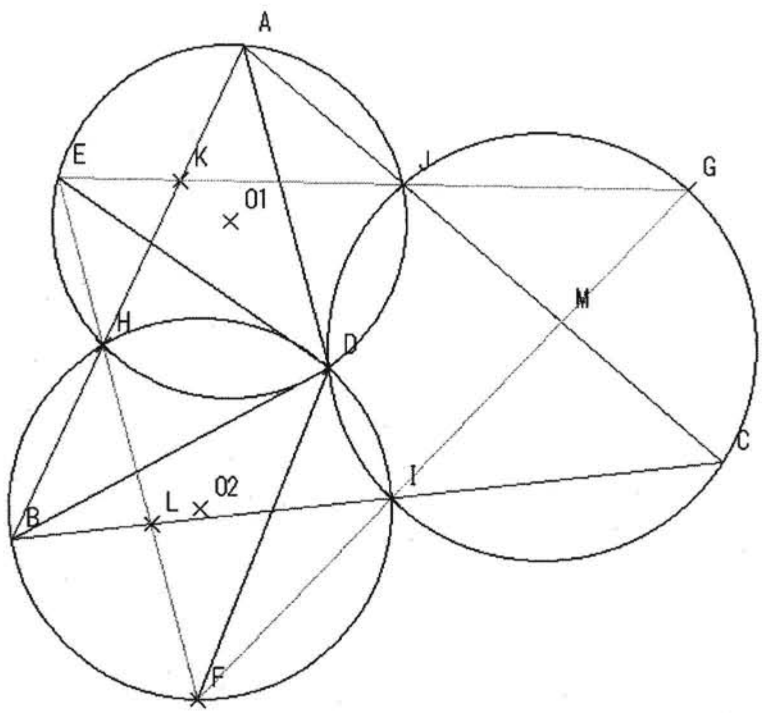

図3

$$\angle OBC = \angle OFG \qquad \cdots\cdots(6)$$

を得る。これより，

$$\angle OBI = \angle OFI$$

となって，点 I が円 O_2 上にあることが分かる。さらに，(1), (5) より

$$\frac{BC}{FG} = \frac{BO}{FO} \qquad \cdots\cdots(7)$$

となる。(6) と (7) から，$\triangle BOC$ と $\triangle FOG$ において，２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle BOC \backsim \triangle FOG \Longrightarrow \angle BCO = \angle FGO \Longrightarrow \angle ICO = \angle IGO.$$

円周角の定理により，

４点 $I,\ O,\ C,\ G$ は同一円周上にある.

同様にして，点 J が円 O_1 上にあって，４点 $J,\ O,\ C,\ G$ も同一円周上にある.

したがって，

５点 $I,\ J,\ O,\ C,\ G$ は同一円 O_3 の周上にある.

このように，４点 A, E, H, J は円 O_1 上に，４点 B, F, H, I は円 O_2 上に，４点 C, G, I, J は円 O_3 上にあり，さらに，３つの円 O_1, O_2, O_3 は一点 O で交わる，ことが示された。

次に,「**点 O が相似回転の中心である**」ことを証明する。すなわち，$\triangle AOE$，$\triangle BOF$ と $\triangle COG$ が相似であることを示す。

$\triangle AOE$ と $\triangle BOF$ において，(5) より

$$\frac{BO}{FO} = \frac{OA}{OE} \Longrightarrow \frac{BO}{OA} = \frac{FO}{OE}. \qquad \cdots\cdots(8)$$

また，$\triangle ABO \backsim \triangle EFO$ より $\angle AOB = \angle EOF$ だから，

$$\angle AOE = \angle AOB - \angle EOB, \quad \angle BOF = \angle EOF - \angle EOB \Longrightarrow \angle AOE = \angle BOF. \quad \cdots(9)$$

(8), (9) より，$\triangle AOE$ と $\triangle BOF$ において，２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle AOE \backsim \triangle BOF.$$

$\triangle AOE$ と $\triangle COG$ についても，同様に，$\triangle AOE \backsim \triangle COG$ が示される。よって，

$\triangle AOE \backsim \triangle BOF \backsim \triangle COG$　が示された。

したがって，点 O は $\triangle ABC$ を $\triangle EFG$ へ移動するような相似回転の中心であることが示された。

尚，$\triangle ABC$ と $\triangle EFG$ が合同の場合，点 O を中心に回転させると，対応する頂点はぴったり重なることは明らかである。

図４ のような場合にも全く同様に証明される。

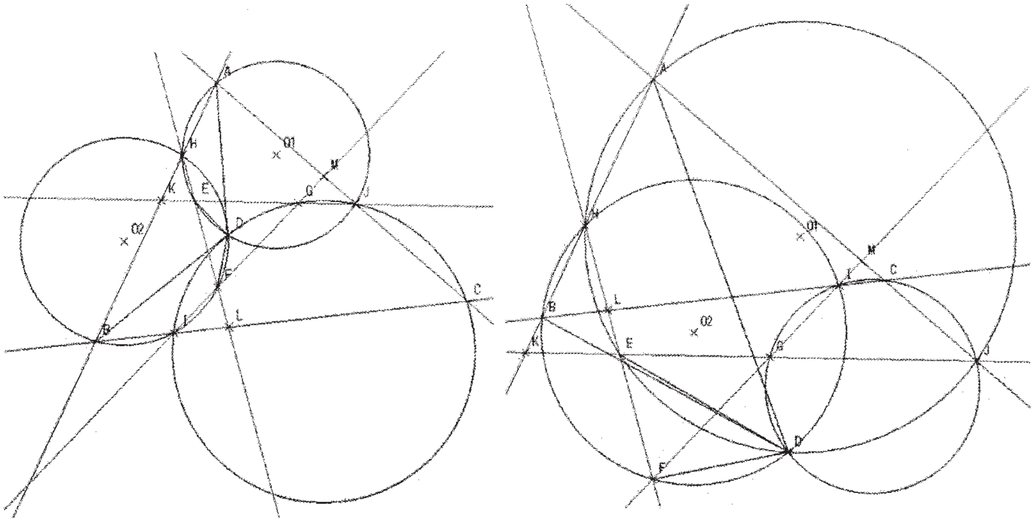

図４

参考文献

[1] エレガントな解答をもとむ，岡部恒治，数学セミナー１月号，1989
[2] アファイン変換の不動点を作図でとらえる，数学文化，No.3，2004
[3] 実践研究講座「算数・数学」，田島　卓・山岸昭善他，長野県総合教育センター，2005
[4] 未来へひろがる数学３，岡本和夫・小関熙純他，新興出版啓林館，2006
[5] 岡部の円　これまでに発見した性質の整理，岡部温樹，第２土曜勉強会，2007

(2009年３月３日　受付)
(2009年６月23日　受理)